https://amf.ui.ac.ir

Journal of Asset Management and Financing
E-ISSN: 2383-1189
Vol. 13, Issue 4, No. 51, 2026, p 35-56
Received: 18/12/2024 Accepted: 09/04/2025

Research Paper

A Comparative Analysis of Option Pricing Models Under Jump Dynamics, Skewness, and Non-Normal Kurtosis

Hossein Nasrollahi
M.A., Zagros Financial Research Group, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran
hosein.nasrolahi@abru.ac.ir

Mohammad Reza Haddadi *
Associate Professor, Zagros Financial Research Group, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran
haddadi@abru.ac.ir

Abstract
The Black-Scholes model assumes log-normal stock returns with constant volatility, yet empirical evidence reveals significant deviations, including skewness and excess kurtosis in financial markets. To better capture these characteristics, extended models incorporating jump processes and non-normal distributions have been developed. This study evaluates the pricing accuracy of four option pricing models—the Black-Scholes model, the Merton jump-diffusion model, the Kou double-exponential jump model, and the Gram-Charlier expansion model—with a focus on their performance under varying degrees of skewness and kurtosis. Our findings indicate that the Gram-Charlier model outperforms the Merton and Kou models in scenarios with negative skewness and leptokurtic distributions. Conversely, the Kou model demonstrates superior accuracy under conditions of low skewness and kurtosis. These results highlight the importance of selecting appropriate pricing models based on the underlying return distribution characteristics.
Keywords: Options, Merton's Diffusion Jump Model, Gram-Charlier Model, Skewness, Kurtosis
JEL Classification: G11, G12

Introduction.

The Black-Scholes model assumes that stock returns follow a normal distribution with constant volatility. However, empirical evidence in financial markets shows that stock returns exhibit significant non-normal skewness and kurtosis. To better capture these characteristics of asset return series, several models have been developed to generalize the Black-Scholes framework for more accurate option pricing. The Merton jump-diffusion model and the Kou model extend the Black-Scholes approach by incorporating a compound Poisson jump process, which allows these models to account for skewness and kurtosis in asset price distributions. An alternative methodology, the Gram-Charlier expansion, addresses skewness and kurtosis effects through a different approach - it uses Hermite polynomials to approximate the probability distribution of asset prices. This study systematically examines and compares the pricing accuracy of four key models: the standard Black-Scholes model, the Merton jump-diffusion model, the Kou model, and the Gram-Charlier expansion. Our analysis specifically focuses on how these models perform under varying conditions of skewness and excess kurtosis, providing insights into their relative strengths and limitations.

Materials & Methods

This study analyzes historical closing prices for three major Iranian financial instruments: (1) Iran Khodro Company (ticker: Khodro) from May 16, 2020 to August 28, 2024; (2) Social Security Investment Company (ticker: Shasta) from March 2, 2022 to August 28, 2024; and (3) Charisma Equity Fund (ticker: Aharm) from December 20, 2021 to August 28, 2024. Volatility estimates for all three

*Corresponding author
Nasrollahi, H. and Haddadi, M. R. (2026). Comparing the efficiency of option pricing models under jump, skewness and non-normal kurtosis. *Journal of Asset Management and Financing*, 13(4), 35-56.

10.22108/amf.2025.143713.1945

securities were computed using historical volatility methods based on the price series. We then calculated European call option prices using four distinct pricing models: the standard Black-Scholes model, Gram-Charlier expansion, Merton jump-diffusion model, and Kou double-exponential jump model. Finally, we conducted a comparative analysis between the model-derived prices and actual market prices to evaluate model performance.

Findings

This study incorporates the effects of skewness and excess kurtosis into various option pricing models. Our comparative analysis reveals that the Gram-Charlier model demonstrates superior pricing accuracy, exhibiting lower errors compared to both the Merton jump-diffusion model and Kou model under conditions of negative skewness and leptokurtic distributions. Conversely, the Kou model outperforms alternative approaches in markets characterized by low skewness and kurtosis. These findings make two significant contributions to the option pricing literature. First, they provide empirical evidence for model selection criteria based on distributional characteristics of underlying assets. Second, they demonstrate that optimal model choice depends critically on specific market conditions. Our results suggest that practitioners should carefully consider the statistical properties of asset returns when selecting pricing models, rather than relying on a single universal approach.

Discussion and Conclusion

The results of this study indicate that for the Shasta symbol, option prices calculated using the Gram-Charlier model significantly outperform those derived from the Kou and Merton models. This superior performance stems from the presence of negative skewness and excessive kurtosis in the data. We conclude that the Gram-Charlier model produces better results than the Merton and Kou jump models when applied to datasets exhibiting negative skewness and high kurtosis. For the Khodro symbol, the Merton model demonstrates greater pricing accuracy compared to both the Gram-Charlier and Kou models, a result attributable to the high kurtosis present in this dataset. Regarding the Leverage symbol, the Kou model provides more accurate option pricing than the Gram-Charlier model, owing to the relatively normal skewness and kurtosis characteristics of the data. These findings lead to two key inferences: First, the Kou model proves particularly suitable for datasets displaying normal characteristics or for cases where normality has been rejected by statistical tests but without significant abnormal skewness and kurtosis. Second, the Merton model serves as an appropriate option pricing model for non-normal datasets characterized primarily by high kurtosis without accompanying skewness.

مدیریت دارایی و تأمین مالی
سال سیزدهم، شماره چهارم، شماره پیاپی (۵۱)، ۱۴۰۴، ص ۳۵-۵۶
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱/۲۰

مقاله پژوهشی

مقایسهٔ کارایی مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار تحت پرش، چولگی و کشیدگی غیرنرمال

حسین نصرالهی

کارشناسی ارشد، گروه پژوهشی مالی زاگرس، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران
hosein.nasrolahi@abru.ac.ir

محمدرضا حدادی *

دانشیار، گروه پژوهشی مالی زاگرس، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران
haddadi@abru.ac.ir

چکیده

مدل بلک شولز فرض می‌کند که بازدهٔ سهام از توزیع نرمال با نوسان ثابت پیروی می‌کند. درصورتی‌که شواهد تجربی در بازارهای مالی نشان می‌دهند که بازدهٔ سهام چولگی و کشیدگی غیرنرمال دارد. به‌منظور انعکاس بهتر ویژگی‌های سری بازدهٔ دارایی‌ها، مدل‌هایی برای تعمیم مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری دقیق‌تر اختیار معامله معرفی شده است. مدل مرتون، مدل کو و گرام‌چارلیه توسعه‌یافته‌هایی از مدل بلک–شولز هستند که با افزودن یک فرایند پرش مرکب پواسون، اثر چولگی و کشیدگی در چگالی قیمت دارایی‌ها را مدل‌سازی می‌کنند. این پژوهش دقت مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار خرید معاملهٔ بلک شولز، مرتون، مدل کو و گرام‌چارلیه را بررسی و مقایسه می‌کند و تأثیر چولگی و کشیدگی غیرنرمال را بر قیمت‌گذاری تحلیل می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که مدل گرام‌چارلیه در شرایط چولگی منفی و کشیدگی غیرنرمال خطای کمتری از مدل‌های پرش انتشار مرتون و مدل کو دارد. درمقابل، در شرایط چولگی و کشیدگی پایین، مدل کو عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: اختیار معامله، مدل پرش انتشار مرتون، مدل گرام‌چارلیه، چولگی، کشیدگی
طبقه‌بندی موضوعی: G12, G11.

---

* نویسندهٔ مسئول

نصرالهی، حسین و حدادی، محمدرضا . (۱۴۰۴). مقایسه کارایی مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار تحت پرش، چولگی و کشیدگی غیرنرمال، *مدیریت دارایی و تامین مالی*، ۱۳ (۴)، ۳۵-۵۶.

10.22108/amf.2025.143713.1945

مقدمه

تجزیه‌وتحلیل دقیق بازار سرمایه به دلیل نقش مهم و اساسی که در توسعه و پیشرفت اقتصادی هر کشوری دارد، از جنبه‌های مختلف ضروری به نظر می‌رسد. به‌منظور کاهش ریسک زیاد سرمایه‌گذاری در این بازار، سرمایه‌گذاران با استفاده از اوراق مشتقه ریسک سرمایه‌گذاری را کاهش می‌دهند. اوراق مشتقه به چهار نوع قرارداد اختیار معامله، قرارداد آتی، قرارداد سلف و قرارداد معاوضه تقسیم می‌شوند (Hull, 1993). در میان اوراق مشتقه، قراردادهای اختیار معامله توجه سرمایه‌گذاران را به خود جلب کرده است. باتوجه‌به اینکه اوراق اختیار، هزینهٔ کمتری در مقایسه با خود سهم دارد، به‌عنوان ابزاری قدرتمند در معاملات به کار گرفته می‌شود و تا حد بسیار زیادی باعث کاهش ریسک می‌شود و درنتیجه درآمد را افزایش می‌دهد (Hajizadeh & Mahootchi, 2019). نکتهٔ کلیدی دربارهٔ اختیار معامله، موضوع قیمت‌گذاری آن است که یکی از ارکان اصلی در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری به شمار می‌آید. اتخاذ تصمیمات درست سرمایه‌گذاری و تخصیص بهینهٔ منابع، مستلزم ارزیابی اوراق با استفاده از روش‌های معتبر علمی است (Darabi & Marufkhani, 2016). مدل بلک شولز به‌عنوان مدلی کلاسیک برای قیمت‌گذاری اختیار معامله شناخته می‌شود؛ اما فروض آن مانند توزیع نرمال بازده و نوسان ثابت در بسیاری از موارد با واقعیت‌های بازار همخوانی ندارد، به‌ویژه در شرایط بازارهای ناپایدار و پرنوسان، بازده‌ها ممکن است توزیع‌های غیرنرمالی داشته باشند؛ بنابراین، انجام پژوهش بر روی قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت توزیع غیرنرمال می‌تواند به افزایش دقت قیمت‌گذاری اختیارها کمک کند.

این پژوهش از نوع کاربردی است و نوآوری اصلی آن مقایسهٔ بین مدل‌های پیشرفتهٔ قیمت‌گذاری اختیار معامله شامل مدل‌های پرش انتشار مرتون (Merton, 1976)، کو (Kou, 2002) و گرام–چارلیه[1] (Chateau & Dufresne, 2017) با استفاده از داده‌های واقعی بازار اختیار معامله در ایران است. این مطالعه برای اولین بار در ایران، کارایی و دقت این مدل‌ها را در شرایط واقعی بازار سرمایهٔ ایران بررسی می‌کند که شامل نوسانات بالا و ساختار نامتعارف بازار است.

علاوه‌براین، پژوهش حاضر با در نظر گرفتن اثر چولگی و کشیدگی در توزیع بازدهی دارایی‌ها و پدیدهٔ پرش در قیمت‌ها توانایی این مدل‌ها را در انعکاس واقعیت‌های بازار ایران ارزیابی می‌کند. این مقایسه نه‌تنها به درک بهتر از سازگاری مدل‌های جهانی با بازارهای نوظهور کمک می‌کند، بلکه می‌تواند به بهبود ابزارهای مدیریت ریسک و قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازارهای مالی ایران منجر شود.

بنابراین، سؤال اصلی پژوهش این است که کدام یک از مدل‌های پرش انتشار مرتون، کو و گرام_چارلیه دقت بیشتری در قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازار ایران دارند.

در ادامه ابتدا مبانی نظری و پیشینهٔ پژوهش مرتبط با قمیت‌گذاری اختیار معامله بررسی شده است. در بخش بعدی روش پژوهش، مدل و متغیرهای مطالعه معرفی شده است و سپس تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و برآورد مدل‌ها بیان و درنهایت دربارهٔ نتایج پژوهش بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

مبانی نظری

مشهورترین مدل برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، مدل بلک شولز نام دارد (Hull, 1993). این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه متحول کند. قیمت دارایی پایه در مدل بلک شولز از معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (۱) پیروی می‌کند (Hull, 1993).

$$dS_t=rS_tdt+\sigma S_tdw_t^Q \qquad (۱)$$

[1] Gram-Charlier

در این معادله S_t قیمت سهم، r نرخ بهرهٔ بدون ریسک، σ نوسان و w_t^Q فرایند براونی استاندارد در اندازه ریسک خنثی Qاست(Hull, 1993). بازدهی مرکب پیوسته روزانهٔ دارایی پایه ازطریق تفاضل‌گیری لگاریتم قیمت در دو دورهٔ متوالی محاسبه می‌شود که در فرمول (۲) ارائه شده است.

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \qquad (۲)$$

به‌طوری‌که r_t بیانگر بازدهی سهام در زمان t و S_t و S_{t-1} بیانگر قیمت سهام در زمان t و $t-1$ است. باتوجه‌به معادلهٔ (۱) می‌توان گفت که σ تنها پارامتر غیرقابل مشاهده در این مدل است که می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخیِ تغییرات قیمت دارایی پایه به‌صورت (۳) برآورد کرد.

$$u_k=\ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right), \quad k = 1,2,\dots,n$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\bar{u})^2} \qquad (۳)$$

به دلیل عدم قطعیت نوسانات ضمنی از نوسان تاریخی برای محاسبهٔ قیمت اختیار استفاده می‌شود. تمرکز بر نوسانات تاریخی به ارائهٔ تحلیل‌های معتبرتر نیز کمک می‌کند (Hull, 1993). فرض اساسی در مدل بلک شولز پیروی لگاریتم بازدهٔ سهام از توزیع نرمال با تلاطم ثابت است؛ اما بعد از سقوط بازار سهام در ۱۹ اکتبر سال ۱۹۸۷ قیمت‌های اختیار معامله در بازار با قیمت‌های حاصل از مدل بلک شولز از تفاوت معنی‌داری برخوردار بود. مطالعات تجربی چولگی و کشیدگی غیرنرمال، بازدهٔ سهام را نشان می‌دهد یعنی بازدهٔ دارایی‌ها دم پهن‌تر و دارای کشیدگی بیشتری در مقایسه با توزیع نرمال است. در این حوزه می‌توان به‌عنوان نمونه به کارهای فاما (Fama, 1965)، رابین‌اشتین (Rubinstein, 1994)، ناندی (Nandi, 1996) و ماندلبرت (Mandelbrot, 1997) اشاره کرد. چولگی و کشیدگی غیرنرمال، منجر به پدیدهٔ لبخند تلاطم می‌شود که همین موضوع باعث کاهش دقت در محاسبهٔ قیمت اختیار می‌شود. درواقع انحرافات نوسان نتیجهٔ نقض تجربی فرض نرمال‌بودن است (Shakran, 2012). پدیدهٔ دنبالهٔ سنگین یا دنبالهٔ چاق از توزیع داده‌ها به شکل توزیع احتمال اشاره دارد که ماهیت داده‌هایی را توصیف می‌کند که در انتهای توزیع، شکل ضخیم‌تری از توزیع نرمال دارند. این پدیدهٔ دنبالهٔ سنگین معمولاً با وقوع فراوانی زیاد در قسمت دم توزیع داده‌ها همراه است. این موضوع به‌عنوان انگیزه‌ای برای پژوهشگران برای توسعهٔ مدل غیرگاوسی عمل کرده است (Fallahpour & Motaharinia, 2017).چندین نظریه برای حل این مشکل ارائه شده است. جاررو و راد (Jarrow & Rudd, 1982) از انحراف از لحظهٔ گاوسی به‌عنوان رویکرد توزیع ناشناخته استفاده می‌کنند. مدل کورنیش–فیشر از توسعهٔ کمیت α براساس تبدیل متغیر تصادفی گاوسی استاندارد به متغیر تصادفی گاوسی غیراستاندارد استفاده می‌کند؛ درحالی‌که کورادو و سو (Corrado & Su, 1996) بازدهٔ قیمت سهام را با گسترش گرام‌چارلیه برای ارزیابی اختیارها مدل‌سازی کرده است. مدل‌های مرتون مقالات اصلی در زمینهٔ ارزیابی اوراق قرضه هستند. این نظریه به‌سرعت توسعه‌یافته و شامل وجود مدل پرش مرتون می‌شود. مدل پرش انتشار مرتون یکی از توسعه‌های مدل بلک شولز است که چولگی و کشیدگی بیش‌ازحد چگالی دارایی پایه را نشان می‌دهد. این مدل با اضافه‌کردن یک فرایند پواسون مرکب به مدل بلک شولز این ویژگی‌ها را در نظر می‌گیرد. درواقع مرتون از فرایند لوی با افزودن فرایند پواسون مرکب (فرایند پرش ناپیوسته) به حرکت براونی با رانش استفاده می‌کند (Merton, 1976).

مدل پرش انتشار مضاعف نمایی برای اولین بار توسط کو معرفی شد (Kou, 2002). مدل کو تعمیم‌یافتهٔ مدل بلک شولز است؛ چون در این مدل توزیع پرش‌ها از توزیع مضاعف نمایی تبعیت می‌کند؛ بنابراین، کشیدگی و دم‌پهنی توزیع بازدهٔ دارایی‌ها را به‌خوبی نشان می‌دهد.

یکی از مقالاتی که دربارهٔ نظریهٔ پرش انتشار مرتون بحث کامل می‌کند، مقالهٔ ماتسودا (Matsuda, 2004) با رویکرد فرایند لِوی است. استفاده از مدل‌های پرش انتشار به دلیل وجود پرش در سری بازدهٔ دارایی‌های مالی اهمیت دارد. پژوهش‌های زیادی برای بررسی پرش در سری بازدهٔ دارایی‌های مالی انجام شده است که می‌توان به سپ و اسوپ (Sepp & Skachkov, 2003) و لوریگ و لوزانو (Lorig & Lozano, 2012) اشاره کرد. پرش در بازدهٔ دارایی‌های مالی باعث به وجود آمدن چولگی و کشیدگی اضافی در مقایسه با توزیع نرمال می‌شود و دم توزیع از توزیع نرمال پهن‌تر است که فرض نرمال‌بودن بازدهٔ دارایی‌های مالی را نقض می‌کند. فرایندهای لوی همچون مدل‌های پرش انتشار، ویژگی دم‌پهن بودن بازدهٔ دارایی‌ها را به‌خوبی در نظر می‌گیرد. مدل مرتون (Merton, 1976) و کو (Kou, 2002) ازجمله مدل‌های پرش انتشار هستند که در آنها توزیع پرش‌ها به ترتیب نرمال و نمایی مضاعف در نظر گرفته شده است؛ علاوه‌براین، از بسط گرام‌چارلیه به‌عنوان تعمیم توزیع نرمال برای غلبه بر مشکل غیرنرمال بودن داده‌ها به‌طور گسترده‌ای استفاده می‌شود (Jondeau & Rockinger, 2001). یکی از روش‌های تقریب استفاده‌شده، چندجمله‌ای‌های هرمیت است (Ord & Stuart, 1994). نایت و ساتچل (Knight & Satchell, 1997) نظریهٔ گرام‌چارلیه (Corrado & Su, 1996) را برای اندازه‌گیری قیمت اختیارها به کار گرفته‌اند. برابران سانتوس (Berberan-Santos, 2007) مدل گرام‌چارلیه (Corrado & Su, 1996) را با چندجمله‌ای‌های هرمیت برای هر توزیع توسعه داده و آن را در ارزیابی قیمت اختیارها به کار برده است. شاتو و دوفریسن (Chateau & Dufresne, 2017) از چندجمله‌ای‌های هرمیت برای گسترش گرام‌چارلیه در ارزیابی قیمت اختیارها با دارایی‌های پایهٔ توزیع نرمال استفاده کرده‌اند. سوپندی و همکاران (Supandi et al., 2017) مدل‌های غیرنرمال را برای بهینه‌سازی سبد سهام بررسی کرده‌اند. در ادامه مردانی و سافیتری (Maruddani & Safitri, 2019) تحلیلی از اثر قیمت دارایی‌ها بر ارزیابی اوراق قرضه بدون کوپن با فرایندهای پرش ارائه داده‌اند. مردانی (2019) نیز با مقایسهٔ مدل مرتون (1976) و مدل گرام‌چارلیه (Corrado & Su, 1996)، اثر چولگی و کشیدگی در عملکرد اوراق قرضه را بررسی کرد. نتایج نشان داد که مدل گرام‌چارلیه سازگارتر از مدل مرتون است؛ درنهایت عبدالرخمان (Abdurakhman, 2019) اثر گشتاور پنجم را بر قیمت اختیار در مدل بلک شولز بررسی کرد. زویا و همکاران (Zoia et al., 2000) به مدل‌سازی سری‌های مالی چندمتغیره و اندازه‌گیری ریسک محاسباتی ازطریق بسط چارلیه پرداختند. مدل گرام‌چارلیه (Corrado & Su, 1996) با بهره‌گیری از گسترش‌ها برای کشیدگی‌ها، برخلاف مدل مرتون، در مدل‌سازی سری‌های مالی چندمتغیره و محاسبهٔ اندازه‌گیری‌های ریسک مؤثر است. اوتاما و همکاران (Utama et al., 2022) در مقاله‌ای مدل قیمت‌گذاری اختیار فروش اروپایی با بسط گرام‌چارلیه را تا گشتاور سوم بررسی کردند. این مقاله مدل گرام‌چارلیه (Corrado & Su, 1996) را با مدل بلک شولز (1973) مقایسه می‌کند و نشان می‌دهد که مدل گرام‌چارلیه در مدل‌سازی قیمت سهام از مدل سنتی بلک شولز پیشی می‌گیرد. مدل‌های پرش انتشار به‌طور گسترده در زمینه‌های مالی، مانند مدل‌سازی نرخ ارز استفاده می‌شوند. این مدل‌ها جهش‌های ناگهانی نرخ ارز را به‌حساب می‌آورند که بیشتر در دوره‌های پرنوسان مشاهده می‌شوند. پژوهشگران راه‌حل‌های تحلیلی را با استفاده از معادلات دیفرانسیل تابعی برای پرداختن به پیچیدگی‌های معرفی‌شده توسط پرش‌ها توسعه داده‌اند (Cupidon & Hyppolite, 2022). در پژوهش‌های جدید نیز مدل‌های پرش انتشار با نوسانات تصادفی، عملکرد بهبودیافته‌ای را در قیمت‌گذاری اختیارهای با مانع در مقایسه با مدل‌های سنتی نشان داده است (Nthiwa et al., 2023)؛ درنهایت مدل پرش انتشار کو (2002) با موفقیت در اختیارهای آمریکایی برای دو دارایی نیز اعمال شده است و با آزمایش عددی رفتار همگرایی مطلوبی را برای قیمت اختیار نشان می‌دهد (Hout, 2024).

اولین پژوهش داخلی مربوط به اختیارها توسط پورحیدی (Pourhaidari, 1999) صورت گرفت که سه مدل قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ اوراق بهادار، شامل مدل توزیع یکنواخت، مدل توزیع دوجمله‌ای و مدل بلک شولز را بررسی کرد. پورحیدی نتیجه می‌گیرد که مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار معامله بهتر از دو مدل دیگر است. در ادامه کیمیاگری و آفریده ثانی (Kimyagari & Afridehthani, 2008) قیمت‌گذاری اختیار معامله را تحت مدل بلک شولز و درخت دوتایی بررسی کرده‌اند. آنها نشان می‌دهند که مدل بلک شولز مدلی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ سهم‌های با نوسان پایین و مدل درخت دوتایی مدلی مناسب برای قیمت‌گذاری سهم‌ها با نوسان بالا است. باغستانی و همکاران (Baghestani et al., 2018) قیمت قرارداد اختیار معاملهٔ آسیایی را تعیین کردند و ابوالی و همکاران (Abvali et al., 2019) روش جدیدی برای اثبات و بهبود معادلهٔ بلک شولز ارائه دادند. بهرادمهر و طهماسبی (2022) نیز قیمت‌گذاری اختیار سکهٔ طلا در بازار بورس کالای ایران را مطالعه کردند. احمدی و اسماعیلی (Ahmadi & Esmaili, 2024) اختیار معاملهٔ رنگین‌کمانی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه براساس حرکت براونی کسری در بازار بورس و اوراق بهادار ایران را بررسی کردند. نصرالهی و همکاران (Nasrollahi et al., 2023) نیز مدل بلک شولز تعمیم‌یافته در نوسانات گارچ با محاسبهٔ ارزش در معرض خطر شرطی را در قیمت‌گذاری اختیارها به کار گرفتند. درخصوص مدل‌های پرش انتشار، نبوی و بهرام‌زاده (Nabavi & Bahramzade, 2018) کارایی فرایند لوی را در قیمت‌گذاری اختیار معاملات و محمدی‌نژاد و نیسی (Mohammadinejad & Nisi, 2022) نیز کارایی این مدل‌ها را برای قیمت‌گذاری اختیار بررسی کردند. پیمانی و همکاران (Peymani et al., 2023) مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی بررسی کردند و عملکرد هریک از آنها را با مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله در نرخ سود غیرتصادفی با مدل بلک شولز و مرتون مقایسه کردند و نتیجه می‌گیرند که در ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت، تفاوت چندانی میان مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله در نرخ سود تصادفی و مدل بلک، شولز و مرتون وجود ندارد؛ درحالی‌که ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت با استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله در سود تصادفی عملکرد بهتری از مدل بلک شولز و مرتون داشته‌اند. حدادی و نصرالهی (Haddadi & Nasrollahi, 2024) به اثر چولگی و کشیدگی بر قیمت‌گذاری اختیار معامله در توزیع غیرنرمال پرداختند و نشان دادند که مدل گرام‌چارلیه از مدل بلک شولز عملکرد بهتری در قیمت‌گذاری دارد؛ درنهایت فرزانگان (Farzanegan, 2024) چولگی و کشیدگی توزیع بازدهٔ شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران را در پیش‌بینی ریسک با مدل GARCH به کمک بسط‌های گرام‌چارلیه بررسی کرد. در این پژوهش کاربردی برای ترکیب چولگی و کشیدگی غیرنرمال در فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز مدل بسط گرام‌چارلیه[1] با مدل پرش انتشار مرتون و مدل پرش انتشار کو در داده‌های واقعی با قیمت بازار مقایسه می‌شود.

روش پژوهش

فرمول‌های بلک شولز برای قیمت‌های اختیار معامله از نوع اروپایی عبارت است از (Hull, 1993):

$$C_{BS} = S_0 N(d) - Ke^{-rT} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right) \quad (۴)$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r + \frac{1}{2}\left(\sigma^2\right)\right]T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (۵)$$

که N نشان‌دهندهٔ تابع احتمال تجمعی نرمال، S_o نشان‌دهندهٔ قیمت جاری سهام، K نشان‌دهندهٔ قیمت اعمال، T نشان‌دهندهٔ تاریخ انقضا، r نشان‌دهندهٔ نرخ بهرهٔ بدون ریسک، σ نشان‌دهندهٔ نوسان‌پذیری بازدهٔ سهم است.

[1] Gram-Charlier

برای در نظر گرفتن تأثیر چولگی و کشیدگی در قیمت دارایی برای ارزیابی اوراق بهادار، بسط گرام چارلیه رویکرد مناسبی است که از چندجمله‌ای هرمیت[1] برای دستیابی به توزیع احتمال استفاده می‌شود (Abdurakhman, 2019). کورادو و سو در مقالهٔ خود توضیح دادند که فرمول کلی برای مدل بلک شولز تعمیم‌پذیر است و این تعمیم به‌صورت رابطهٔ (۶) بیان می‌شود.

$$C_{BS}=e^{-rT}\int_K^\infty (S_T-K)g(S_T)\,dS_T=e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(S_0e^{\left(r-0.5\sigma^2\right)T+z\sigma\sqrt{T}}-K\right)n(z)\,dz \qquad (۶)$$

که تابع n نشان‌دهندهٔ چگالی نرمال، S_0 نشان‌دهندهٔ قیمت جاری سهام، S_T نشان‌دهندهٔ قیمت سهام در سررسید، K نشان‌دهندهٔ قیمت اعمال، T نشان‌دهندهٔ تاریخ انقضا، r نشان‌دهندهٔ نرخ بهرهٔ بدون ریسک، σ نشان‌دهندهٔ نوسان‌پذیری بازدهٔ سهم و g تابع قیمت است.

لاپلاس (Laplace, 1811) چندجمله‌ای هرمیت را تعریف کرد و چبیشف (Chebyshev, 1859) آن رامطالعه کرد که شکل این چندجمله‌ای به‌صورت (۷) بیان می‌شود.

$$H_n(z)=(-1)^n e^{\frac{z^2}{2}}\frac{d^n}{dz^n}e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad (۷)$$

این چندجمله‌ای دارای ویژگی‌های متعامد به‌صورت (۸) است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z)H_n(z)n(z)\,dz=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ m! & ,m=n\end{cases} \qquad (۸)$$

که $n(z)$ تابع چگالی نرمال است. تابع چگالی می‌تواند به‌صورت چندجمله‌ای هرمیت گسترش یابد:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n(z)n(z) \qquad (۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned}C_m&=\frac{1}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}g(z)H_m(z)\,dz\\ g(z)&=\sum_{n=0}^{4}C_nH_n(z)n(z)=\\ &n(z)\left[H_0(z)+\mu_1H_1(z)+\frac{1}{2!}(\mu_2-1)H_2(z)+\frac{1}{3!}(\mu_3-3\mu_1)H_3(z)+\frac{1}{4!}(\mu_4-6\mu_2+3)H_4(z)\right]\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

پس از جایگزینی معادلهٔ (۱۰) به معادلهٔ (۶) فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل گرام چارلیه با در نظر گرفتن چولگی و کشیدگی، به فرم (۱۱) به دست می‌آید.

$$C_{GC}=C_{BS}+\mu_3Q_3+(\mu_4-3)Q_4 \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$Q_3=\frac{1}{3!}S_0\sigma\sqrt{T}\left(2\sigma\sqrt{T}-d\right)n(d)-\sigma^2TN(d)$$

$$Q_4=\frac{1}{4!}S_0\sigma\sqrt{T}\left(\left(d^2-1-3\sigma\sqrt{T}\left(d-\sigma\sqrt{T}\right)\right)n(d)+\sigma^3T^{\frac{3}{2}}N(d)\right)$$

و μ_3 نشان‌دهندهٔ ضریب چولگی و μ_4 نشان‌دهندهٔ ضریب کشیدگی است.

[1] Hermite

در مدل پرش انتشار مرتون (1976)، فرایند قیمت سهام (S_t) با اندازهٔ احتمال فیزیکی (P) فرض می‌شود که از معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (۱۲) پیروی می‌کند.

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + \left(y_t - 1\right) dN_t \tag{۱۲}$$

که μ بازدهٔ مدنظر آنی، σ تلاطم آنی بازدهٔ دارایی پایه است که جزء پیوستهٔ فرایند قیمت با حرکت براونی استاندارد W_t است و ناپیوستگی‌های فرایند قیمت توسط یک شمارندهٔ پواسون N_t توصیف می‌شود که با شدت λ و اندازهٔ پرش y_t مشخص می‌شود. فرض بر این است که حرکت براونی W_t، فرایند پواسون N_t و اندازهٔ پرش y_t مستقل هستند. احتمال جهش قیمت دارایی در بازهٔ زمانی کوچک dt را می‌توان با استفاده از فرایند پواسون dN_t نمایش داد؛ به‌طوری‌که

$$P\left[dN_t = 0\right] = 1 - \lambda dt \quad \text{و} \quad P\left[dN_t = 1\right] = \lambda dt$$

قیمت سهام S_{t-}، ارزش فرایند قیمت قبل از پرش است. هرگاه از S_{t-} به $S_t = y_t S_{t-}$ در بازهٔ زمانی کوچک dt پرش کند، درصد تغییر با $\left(y_t - 1\right)$ اندازه‌گیری می‌شود. قیمت S_t پرش‌های لگاریتمی-نرمال y_t را در هر زمان تصادفی t ارائه می‌دهد که زمان پرش یک فرایند پواسن را نشان می‌دهد (Jorion, 1988; Jondeau et al., 2007).

مدل پرش انتشار مرتون برخلاف مدل بلک شولز کامل نیست؛ بنابراین، انتخاب‌های زیادی برای تعریف اندازهٔ احتمال ریسک خنثی Q وجود دارد که معادل با اندازهٔ احتمال فیزیکی P باشد؛ به‌طوری‌که قیمت سهام تنزیل‌شدهٔ $e^{-rt}S_t$ یک مارتینگل باشد؛ به‌عبارت‌دیگر انتظار مقدار آیندهٔ فرایند، برابر با مقدار فعلی آن است. این ویژگی نشان‌دهندهٔ عدم وجود روند صعودی یا نزولی در فرایند است؛ علاوه‌براین، برای اینکه قیمت سهام تنزیل‌شده یک مارتینگل باشد، پارامتر رانش μ باید به‌صورت $\mu = r - \lambda\kappa$ تنظیم شود.

حل معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مشخص‌شده در (۱۲) دینامیک قیمت سهام را در یک اندازه‌گیری احتمال خنثی ریسک Q نشان می‌دهد که به شکل معادلهٔ (۱۳) است.

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=0}^{N_t} Y_i\right), \quad 0 \le t \le T \tag{۱۳}$$

که در آن $Y_t = ln\left(y_t\right)$ اندازهٔ پرش قیمت سهام در بازدهٔ لگاریتمی است. قیمت اختیار اروپایی مرتون (1976) را می‌توان به‌صورت (۱۴) بیان کرد.

$$C\left(S_0, T\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\hat{\lambda}T\right)^n e^{-\hat{\lambda}T}}{n!}\left[S_0 N\left(d_{1,n}\right) - Ke^{-r^n T} N\left(d_{2,n}\right)\right] \tag{۱۴}$$

$$\kappa = E(Y-1),\quad \hat{\lambda} = \lambda(1+\kappa),\quad \sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}},\quad r_n = r - \lambda\kappa + n\frac{\ln(1+\kappa)}{T},$$

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}},\quad r_n = r - \lambda\kappa + n\frac{\ln(1+\kappa)}{T},$$

$$d_{1,n} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_n + \frac{1}{2}\sigma_n{}^2\right)}{\sigma_n\sqrt{T}},\quad d_{2,n} = d_{1,n} - \sigma_n\sqrt{T}$$

که تابع N نشان‌دهندهٔ توزیع تجمعی نرمال، S_0 نشان‌دهندهٔ قیمت جاری سهام، S_T نشان‌دهندهٔ قیمت سهام در سررسید، K نشان‌دهندهٔ قیمت اعمال، T نشان‌دهندهٔ تاریخ انقضا، r نشان‌دهندهٔ نرخ بهرهٔ بدون ریسک و σ نشان‌دهندهٔ نوسان‌پذیری بازدهٔ دارایی پایه است.

مدل کو (2002) دو بخش دارد: بخش اول پیوسته است و از حرکت براونی هندسی پیروی می‌کند و بخش دوم، فرایند جهشی است که وقوع پرش توسط یک فرایند پواسون و اندازهٔ پرش از توزیع نمایی مضاعف پیروی می‌کند. دینامیک فرایند قیمت سهام به‌صورت (۱۵) است.

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left[\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1)\right] \tag{۱۵}$$

که در $Y_t = ln\left(y_t\right)$ دارای توزیع مضاعف نمایی غیرمتقارن با تابع چگالی (۱۶) است

$$f_y(x) = P\eta_1 e^{-\eta_1 x} 1_{\{x\geq 0\}} + (1-P)\eta_2 e^{-\eta_2 x} 1_{\{x\leq 0\}} \quad \eta_1 \succ 1, \eta_2 \succ 0 \tag{۱۶}$$

که در آن P و $1-P$ نشان‌دهندهٔ احتمال پرش‌های به سمت بالا و پایین است؛ به‌عبارت‌دیگر

$$y = \log Y = \begin{cases} \xi^+ & P \\ -\xi^- & 1-P \end{cases}$$

که در آن ξ^+ و ξ^- متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\eta_1}$ و $\frac{1}{\eta_2}$ است. شرط $\eta_1 \succ 1$ تضمین می‌کند که $E[Y] \prec \infty$ و $E[S_t] \prec \infty$ است که معنی آن این است که به‌طور متوسط پرش‌های رو به بالا از ۱۰۰درصد تجاوز نمی‌کند (Kou, 2002).

$$\kappa = E[y_t - 1] = (1-P)\frac{\eta_2}{\eta_2+1} + P\frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} \quad \eta_1 \succ 1, \eta_2 \succ 0$$

در اندازهٔ ریسک خنثی عبارت است از:

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \left[r - \lambda E(Y-1)\right]dt + \sigma dW_t + d\left[\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1)\right]$$

$$= (r - \lambda\psi)dt + \sigma dW_t + d\left[\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1)\right].$$

درنهایت اثر تغییرات داده‌ها بر روی قیمت اختیار با محاسبهٔ خطا بررسی می‌شود. خطا به کمک روش MAPE[1] به‌صورت

[1] Mean Absolute Percentage Error

(۱۶) محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{C}_i - C_i)}{\hat{C}_i} \times 100 \qquad (۱۶)$$

که $\hat{C}_i$ نشان‌دهندهٔ قیمت پایانی اختیار در بازار و C_i نشان‌دهندهٔ قیمت محاسبه‌شدهٔ اختیار و n میزان تعداد مشاهدات است.

یافته‌ها

در این پژوهش، داده‌های استفاده‌شده، قیمت پایانی سهم ایران‌خودرو با نماد خودرو در بازهٔ زمانی ۰۲/۲۷/ ۱۳۹۹ تا ۰۶/۰۷/ ۱۴۰۳، قیمت پایانی سهم سرمایه‌گذاری تأمین اجتماعی با نماد شستا در بازهٔ زمانی ۱۲/۱۱/ ۱۴۰۰ تا ۰۶/۰۷/ ۱۴۰۳و قیمت پایانی صندوق سهامی کاریزما با نماد اهرم در بازهٔ زمانی ۰۹/۲۹/ ۱۴۰۰ تا ۰۶/۰۷/ ۱۴۰۳ است. نوسان‌پذیری قیمت نماد خودرو، شستا و اهرم به روش داده‌های تاریخی برآورد شده است. قیمت اختیار خرید اروپایی در مدل بلک شولز، گرام‌چارلیه، مرتون و کو محاسبه و درنهایت با قیمت بازار اختیار مقایسه شده است. لازم به ذکر است که برای محاسبه و تحلیل داده‌ها از نرم‌افزار R نسخهٔ ۲-۳-۴ استفاده شده است.

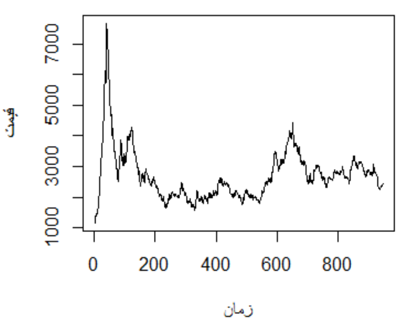
فرض اساسی در مدل بلک شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌های پایه، لگ نرمال است؛ اما در بازارهای مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ نرمال، دارای چولگی و کشیدگی غیرنرمال است که باعث ایجاد دم سنگین‌تری در مقایسه با توزیع نرمال است (Chateau & Dufresne, 2017). برای ترکیب چولگی و کشیدگی غیرنرمال در فرمول قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ بلک شولز از بسط گرام‌چارلیه تابع چگالی نرمال و مدل‌های پرش انتشار مرتون و کو استفاده می‌شود.

جدول (۱):آماره‌های توصیفی

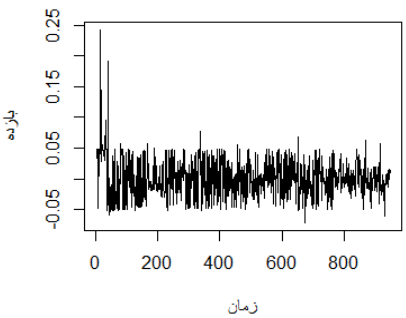
Table (1): Descriptive statistics

تعداد مشاهدات	بیشترین	کمترین	انحراف معیار	میانگین	کشیدگی	چولگی	آماره توصیفی
۹۴۹	۰/۲۴۱۷۱	−۰/۰۷۰۸۸	۰/۰۲۹۸۷	۰/۰۰۰۷۷	۸/۰۹۷۵۷	۰/۸۶۰۴۷	بازدهٔ ایران‌خودرو
۵۷۲	۰/۰۵۸۵۸	−۰/۱۵۵۵۴	۰/۰۱۹۶۱	۰/۰۰۰۳۹	۱۴/۱۷۹۲۹	−۱/۱۷۰۹۶	بازدهٔ شستا
۶۳۱	۰/۰۹۵۳۱	−۰/۰۸۸۴۳	۰/۰۲۶۷۴	۰/۰۰۰۸۲	۴/۵۹۵۵۸	۰/۳۴۳۰۵	بازدهٔ اهرم

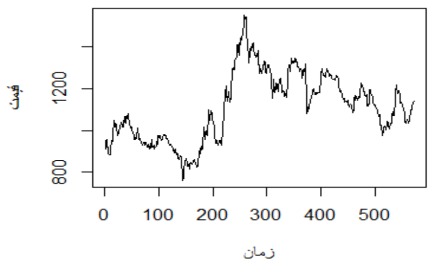
باتوجه‌به جدول(۱) مشاهده می‌شود که اختلاف بیشترین و کمترین در دورهٔ بررسی‌شده زیاد است و نشان از تغییرات زیاد در دوره است و احتمال پرش وجود دارد (Kou, 2002). چولگی بزرگ داده‌ها از دنباله‌های پهن در توزیع بازده است. در شکل(۱) نمودار قیمت روزانه و بازدهٔ لگاریتمی روزانه برای نمادهای خودرو، شستا و اهرم ارائه شده است.



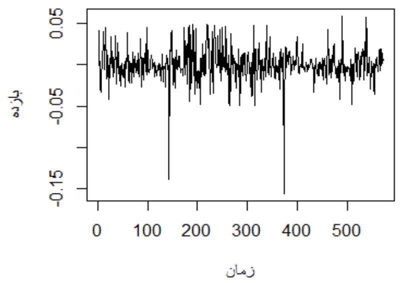
الف) نمودار قیمت روزانهٔ نماد خودرو



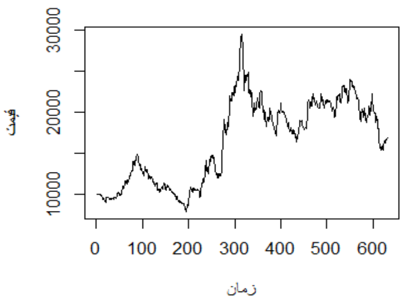
ب) نمودار بازدهٔ لگاریتمی روزانهٔ نماد خودرو



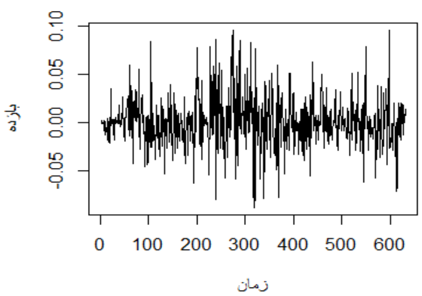
الف) نمودار قیمت روزانهٔ نماد شستا



ب) نمودار بازدهٔ لگاریتمی روزانهٔ نماد شستا



الف) نمودار قیمت روزانهٔ نماد اهرم



ب) نمودار بازدهٔ لگاریتمی روزانهٔ نماد اهرم

شکل (۱): نمودار قیمت و بازدهٔ لگاریتمی روزانهٔ نمادهای خودرو، شستا و اهرم

Figure (1): Chart of price and daily logarithmic returns of the symbols of the khodro, Shasta and Ahrom

در جدول (۲) نرمال‌بودن داده‌ها بررسی شده است. آزمون شاپیرو- ویلک[1] و جاک‌برا[2] آزمون‌های آماری هستند که فرض صفر نرمال و فرض جایگزین غیرنرمال بودن است. باتوجه‌به جدول ۲ مشاهده می‌شود که داده‌های هر سه سهم غیرنرمال هستند.

جدول (۲): آزمون نرمال‌بودن

Table (2): Normality test

متغیر پژوهش	آزمون جاک- برا		آزمون شاپیرو – ویلک		وضعیت نرمال‌بودن
	آمارهٔ آزمون	سطح معنی‌داری	آمارهٔ آزمون	سطح معنی‌داری	
سری بازده روزانه نماد خودرو	۱۱۴۳/۴	۰/۰۰۰۰۰	۰/۹۴۴۹۶	۰/۰۰۰۰۰	غیرنرمال
سری بازده روزانه سهم شستا	۳۱۰۳/۹	۰/۰۰۰۰۰	۰/۸۹۰۰۵	۰/۰۰۰۰۰	غیرنرمال
سری بازده روزانه نماد اهرم	۷۹/۱۸۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۹۶۹۹۱	۰/۰۰۰۰۰	غیرنرمال

در ادامه قبل از مدل‌سازی برای جلوگیری از انجام رگرسیون‌های کاذب، مانایی سری بازده توسط دو نوع آزمون مانایی دیکی–فولر تعمیم‌یافته[3] و کواتکویسکی–فیلیپس–اشمیت–شین[4] بررسی شده است و مانایی سری بازده تأیید شد که در جدول (۳) ارائه شده است.

[1] Shapiro-Wilk Test
[2] Jarque Bera Test
[3] Augmented Dickey–Fuller test
[4] Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) tests

جدول (۳): آزمون مانایی

Table (3): Stationarity test

متغیر تحقیق	آزمون دیکی–فولر تعمیم‌یافته		آزمون KPSS		وضعیت مانایی
	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	
سری بازدهٔ روزانهٔ ایران‌خودرو	−۷/۷۴۳۸	۰/۰۱	۰/۱۶۴۶۳	۰/۱	مانا
سری بازدهٔ روزانهٔ شستا	−۷/۹۸۷۴	۰/۰۱	۰/۰۸۱۳۲	۰/۱	مانا
سری بازدهٔ روزانهٔ اهرم	−۸/۴۵۶۷	۰/۰۱	۰/۱۴۰۰۴	۰/۱	مانا

در ادامه در جدول (۴) پارامترهای اولیه در مدل‌های مرتون و کو و در جدول (۵) پارامترهای نهایی در مدل‌های مرتون و کو تخمین زده می‌شود. لازم به ذکر است برای تخمین پارامترها از بازهٔ زمانی اطلاعات پژوهش استفاده شده است.

جدول (۴): تخمین اولیهٔ پارامترها

Table (4): Initial estimation of parameters

داده	نام پارامترها	μ	σ	λ	P	η_2	η_1	δ	β
خودرو	مدل مرتون	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۲۷۵	۰/۰۰۹۴	_	_	_	۰/۶۹۱۳	۰/۵۲۴۶
	مدل کو	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۲۷۵	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۳۵	_	_
شستا	مدل مرتون	−۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۳۶	۰/۰۶۶۵	_	_	_	۰/۴۵۴۵	۰/۱۶۹۸
	مدل کو	−۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۳۶	۰/۰۶۶۵	۰/۰۴۵۵	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۴۳	_	_
اهرم	مدل مرتون	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۲۰۳	۰/۰۶۵۰	_	_	_	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۸۱
	مدل کو	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۲۰۳	۰/۰۴۷۰	۰/۰۳۰۲	۰/۰۴۲۰	۰/۰۲۷۶	_	_

جدول (۵): تخمین نهایی پارامترها

Table (5): Final estimation of parameters

داده	نام پارامترها	μ	σ	λ	P	η_2	η_1	δ	β
خودرو	مدل مرتون	۰/۰۰۱۱	۰/۰۲۷۵	۰/۰۰۰۰۰۰۱	_	_	_	۰/۶۸۷۱	۰/۵۲۱۳
	مدل کو	−۰/۰۰۱۳	۰/۰۲۸۵	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۹۸	۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۶۰	_	_
شستا	مدل مرتون	۰/۰۰۰۳	۰/۰۱۱۹	۰/۰۰۰۲	_	_	_	۰/۴۴۱۲	۰/۱۵۶۷
	مدل کو	−۰/۰۱۸۲	۰/۰۱۷۶	۰/۰۴۸۰	۰/۰۳۹۱	۰/۰۴۳۶	۰/۰۲۸۹	_	_
اهرم	مدل مرتون	−۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۹۶	۰/۰۵۹۶	_	_	_	۰/۰۸۵۸	۰/۰۵۴۲
	مدل کو	−۰/۰۱۷۴	۰/۰۲۴۱	۰/۰۴۷۰	۰/۰۳۰۲	۰/۰۴۲۰	۰/۰۲۷۶	_	_

در ادامه در جداول (۸)–(۶) قیمت اختیار با چهار مدل بلک شولز، پرش انتشار کو، پرش انتشار مرتون و گرام‌چارلیه در سه نماد خودرو، شستا و اهرم تعیین می‌شود و قیمت اختیار خرید به‌دست‌آمده با قیمت بازار نمادهای اختیارهای آنها به ترتیب با نام‌های ضخود، ضستا و ضهرم مقایسه می‌شود.

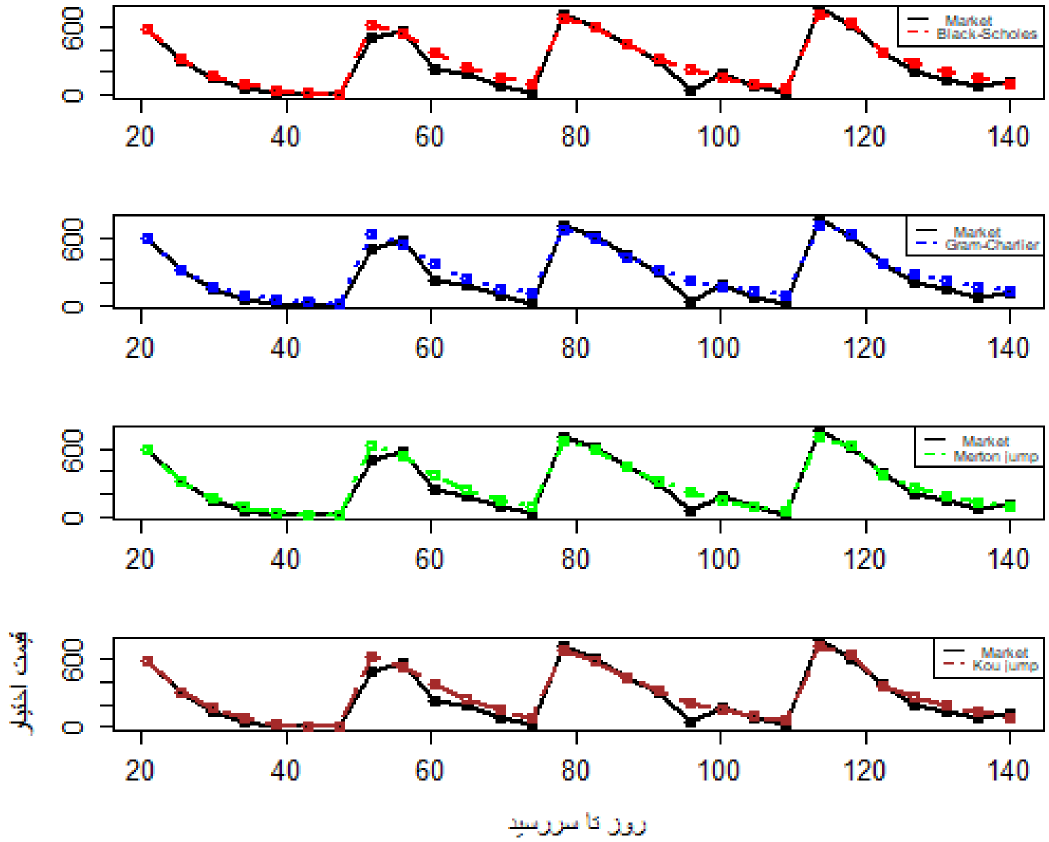
برای نمایش بهتر عملکرد هر مدل در جداول (۸)–(۶) در قیمت‌هایی که خطای بسیار کمتری از سایر مدل‌ها ارائه شده است، از رنگ سبز در جدول و در قیمت‌هایی که خطای زیادی از سایر مدل‌ها ارائه شده، از رنگ قرمز استفاده شده است. اشکال (۴)–(۲) نیز ارائه شده است تا به‌خوبی به نمایش عملکرد هر مدل پرداخته شود. لازم به ذکر است که در هر شکل نمودار قیمت مدل‌های پیشنهادی با قیمت بازار نشان داده شده است

جدول (۶): اختیار خرید اروپایی نماد خودرو با نوسان تاریخی با قیمت سهم ۲۴۵۲

Table (6): European call option of the khodro symbol with historical volatility with a share price of 2452

روز تا اعمال	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		گرام‌چارلیه		پرش انتشار مرتون		پرش انتشار کو	
			قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا
۲۸	۱۹۰۰	۵۹۰	۵۸۷/۲	۰/۴۸۰۳	۵۸۷/۷	۰/۳۹۶۵	۵۸۶/۳	۰/۶۲۶۰	۵۸۷	۰/۵۱۷۵
۲۸	۲۲۰۰	۳۰۹	۳۱۷/۶	۲/۷۸۵۱	۳۰۸/۰	۰/۳۰۷۲	۳۱۱/۸	۰/۹۱۰۱	۳۱۴/۵	۱/۷۹۲۰
۲۸	۲۴۰۰	۱۴۲	۱۷۸/۴	۲۵/۶۵۷۵	۱۶۷/۲	۱۷/۷۸۰۳	۱۶۸/۹	۱۸/۹۵۹۲	۱۷۳/۲	۲۱/۹۸۷۹
۲۸	۲۶۰۰	۴۹	۸۶/۱	۷۵/۷۴۶۷	۸۷/۰	۷۷/۵۸۴۸	۷۶/۳	۵۵/۶۳۸۵	۸۰/۶	۶۴/۵۲۷۳
۲۸	۲۸۰۰	۱۱	۳۵/۷	۲۲۴/۸۵۶۸	۵۰/۴	۳۵۷/۹۵۹۰	۲۸/۶	۱۶۰/۲۵۶۹	۳۱/۷	۱۸۸/۰۱۹۷
۲۸	۳۰۰۰	۵	۱۲/۹	۱۵۷/۷۰۷۷	۳۱/۲	۵۲۴/۹۸۳۱	۹/۰	۸۰/۸۱۲۷	۱۰/۶	۱۱۲/۶۰۰۵
۲۸	۳۲۵۰	۲	۳/۰	۵۱/۲۵۵۷	۱۵/۲	۶۶۱/۴۷۳۴	۱/۷	۱۳/۶۸۰۳	۲/۲	۱۱/۳۸۴۱
۵۶	۱۹۰۰	۵۰۲	۶۲۷/۸	۲۵/۰۶۵۰	۶۲۵/۴	۲۴/۵۸۲۷	۶۲۴/۵	۲۴/۴۰۷۲	۶۲۶/۴	۲۴/۷۸۷۹
۵۶	۲۰۰۰	۵۷۰	۵۴۰/۲	۵/۲۲۷۷	۵۳۳/۸	۶/۳۴۹۵	۵۳۵/۰	۶/۱۳۸۰	۵۳۷/۷	۵/۶۶۱۷
۵۶	۲۲۰۰	۲۳۰	۳۸۱/۵	۶۵/۸۶۲۹	۳۶۷/۸	۵۹/۹۳۳۳	۳۷۱/۸	۶۱/۶۶۴۰	۳۷۶/۴	۶۳/۶۷۳۶
۵۶	۲۴۰۰	۱۸۷	۲۵۲/۲	۳۴/۸۵۱۱	۲۳۹/۲	۲۷/۹۱۶۲	۲۳۸/۹	۲۷/۷۵۳۵	۲۴۵/۰	۳۱/۰۳۲۵
۵۶	۲۶۰۰	۸۴	۱۵۶/۱	۸۵/۸۱۵۰	۱۵۴/۰	۸۳/۳۵۸۸	۱۴۱/۷	۶۸/۶۶۲۲	۱۴۸/۲	۷۶/۴۱۶۲
۵۶	۲۸۰۰	۲۰	۹۰/۸	۳۵۴/۰۳۲۲	۱۰۳/۹	۴۱۹/۸۴۰۰	۷۷/۸	۲۸۹/۰۹۳۱	۸۳/۵	۳۱۷/۸۶۵۰
۹۱	۱۹۰۰	۷۱۳	۶۷۹/۵	۴/۷۰۲۱	۶۷۴/۵	۵/۳۹۳۵	۶۷۳/۴	۵/۵۵۴۳	۶۷۶/۷	۵/۰۸۱۰
۹۱	۲۰۰۰	۶۱۰	۵۹۸/۰	۱/۹۵۵۴	۵۸۹/۰	۳/۴۳۴۱	۵۸۹/۸	۳/۳۱۳۶	۵۹۴/۱	۲/۶۰۴۸
۹۱	۲۲۰۰	۴۴۴	۴۵۰/۶	۱/۴۹۲۶	۴۳۵/۹	۱/۸۰۴۱	۴۳۷/۷	۱/۴۰۸۸	۴۴۴/۰	۰/۰۰۶۶
۹۱	۲۴۰۰	۳۰۰	۳۲۷/۳	۹/۱۰۷۴	۳۱۴/۴	۴/۷۹۵۳	۳۱۰/۷	۳/۵۹۵۸	۳۱۸/۶	۶/۱۹۵۰
۹۱	۲۶۰۰	۴۱	۲۲۹/۷	۴۶۰/۱۶۷۴	۲۲۶/۵	۴۵۲/۵۱۹۴	۲۱۱/۴	۴۱۵/۵۹۱۵	۲۱۹/۸	۴۳۶/۱۵۸۸
۹۱	۲۸۰۰	۱۸۰	۱۵۶/۱	۱۳/۲۵۶۵	۱۶۷/۵	۶/۹۳۱۷	۱۳۸/۲	۲۳/۲۲۹۰	۱۴۶/۳	۱۸/۷۰۹۷
۹۱	۳۰۰۰	۷۷	۱۰۳/۲	۳۴/۰۳۶۲	۱۲۸/۹	۶۷/۵۰۶۶	۸۷/۱	۱۳/۲۰۰۸	۹۴/۳	۲۲/۴۸۰۲
۹۱	۳۲۵۰	۱۹	۵۹/۵	۲۱۲/۹۰۱۲	۹۷/۵	۴۱۳/۴۵۷۷	۴۶/۹	۱۴۶/۸۵۹۲	۵۲/۳	۱۷۵/۶۰۳۱
۱۱۹	۱۹۰۰	۷۶۶	۷۱۹/۵	۶/۰۷۷۲	۷۱۴/۰	۶/۷۷۵۹	۷۱۱/۵	۷/۱۰۷۵	۷۱۵/۹	۶/۵۳۸۰
۱۱۹	۲۰۰۰	۶۱۲	۶۴۱/۷	۴/۸۵۲۳	۶۳۲/۵	۳/۳۵۱۴	۶۳۱/۵	۳/۱۸۵۴	۶۳۶/۸	۴/۰۶۰۹
۱۱۹	۲۴۰۰	۳۷۹	۳۸۰/۳	۰/۳۴۳۷	۳۶۸/۵	۲/۷۷۰۹	۳۶۱/۷	۴/۵۴۸۵	۳۷۰/۶	۲/۲۰۸۸
۱۱۹	۲۶۰۰	۲۰۱	۲۸۲/۳	۴۰/۴۴۷۰	۲۷۹/۵	۳۹/۰۹۴۷	۲۶۱/۶	۳۰/۱۸۱۳	۲۷۱/۳	۳۴/۹۸۳۳
۱۱۹	۲۸۰۰	۱۳۷	۲۰۵/۲	۴۹/۷۴۸۰	۲۱۶/۱	۵۷/۷۷۲۲	۱۸۴/۲	۳۴/۴۶۹۰	۱۹۳/۸	۴۱/۴۹۱۸
۱۱۹	۳۰۰۰	۷۵	۱۴۶/۳	۹۵/۱۱۹۸	۱۷۲/۰	۱۲۹/۴۴۹۴	۱۲۶/۶	۶۸/۸۲۹۴	۱۳۵/۵	۸۰/۷۲۲۴
۱۱۹	۳۲۵۰	۱۱۰	۹۳/۸	۱۴/۷۱۹۸	۱۳۴/۸	۲۲/۵۳۶۷	۷۶/۹	۳۰/۰۳۰۷	۸۴/۴	۲۳/۲۳۹۹
			میانگین خطا	۷۳/۵۰۹۵		۱۲۴/۲۸۷۶		۵۷/۱۳۵۷		۶۳/۵۷۷۷

باتوجه‌به جدول (۶) در نماد خودرو در کوتاه‌مدت (۲۸ روزه) در حالت در سود، مدل گرام خطای کمتری از خود نشان می‌دهد و درمجموع میانگین خطا، مدل پرش انتشار مرتون خطای کمتری را از سه مدل دیگر در مقایسه با قیمت بازار نشان می‌دهد؛ از طرف دیگر در حالت در ضرر، مدل گرام در کلیهٔ حالات (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت) خطای بسیار بالایی را از سایر مدل‌ها از خود نشان می‌دهد.



شکل (۲): نمودار قیمت اختیار نماد خودرو با مدل‌های بلک شولز، گرام‌چارلیه، مرتون و کو در مقایسه با بازار

Figure (2): Chart of khodro symbol option price with Black Scholes, Gram Charlier, Merton and Kou models compared to the market

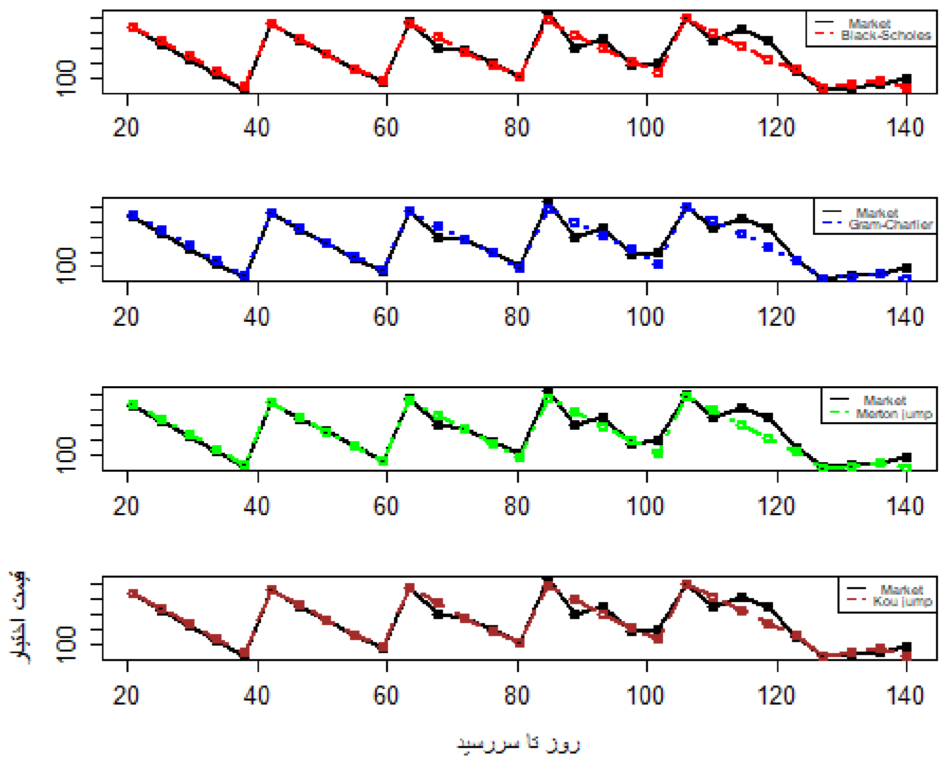
جدول (۷): اختیار خرید اروپایی نماد شستا با نوسان تاریخی با قیمت سهم ۱۱۴۰

Table (7): European call option of Shasta symbol with historical volatility with a share price of 1140

روز تا اعمال	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		گرام‌چارلیه		انتشار پرش مرتون		انتشار پرش کو	
			قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا
۳۵	۷۰۰	۴۶۰	۴۵۵/۳	۱/۰۲۸۴	۴۵۵/۱	۱/۰۶۴۴	۴۵۵/۳	۱/۰۲۸۳	۴۵۸/۱	۰/۴۱۵۳
۳۵	۸۰۰	۳۴۵	۳۵۷/۵	۳/۶۰۹۰	۳۵۷/۴	۳/۵۸۸۵	۳۵۷/۵	۳/۶۰۹۰	۳۶۰/۷	۴/۵۵۱۶
۳۵	۹۰۰	۲۶۰	۲۵۹/۷	۰/۰۹۹۶	۲۶۲/۱	۰/۸۲۲۸	۲۵۹/۷	۰/۰۹۹۶	۲۶۳/۳	۱/۲۸۶۷
۳۵	۱۰۰۰	۱۶۲	۱۶۴/۳	۱/۳۸۶۷	۱۷۲/۱	۶/۲۵۰۰	۱۶۱/۹	۰/۰۵۹۵	۱۶۷/۲	۳/۱۹۰۸
۳۵	۱۱۰۰	۷۱	۸۲/۰	۱۵/۵۱۶۹	۷۶/۲	۷/۲۲۹۹	۶۹/۶	۲/۰۰۵۸	۸۱/۸	۱۵/۱۸۵۸
۳۵	۱۲۰۰	۲۲	۲۹/۶	۳۴/۵۳۲۶	۱۳/۹	۳۷/۰۸۹۵	۱۳/۵	۳۸/۷۷۰۴	۲۶/۹	۲۲/۴۸۳۸
۶۳	۷۰۰	۴۷۵	۴۶۷/۳	۱/۶۳۲۵	۴۶۶/۹	۱/۶۹۷۸	۴۶۷/۳	۱/۶۳۲۵	۴۷۲/۲	۰/۵۸۶۱
۶۳	۸۰۰	۳۰۰	۳۷۱/۲	۲۳/۷۲۵۳	۳۷۲/۳	۲۴/۰۸۴۳	۳۷۱/۱	۲۳/۷۱۲۶	۳۷۶/۹	۲۵/۶۲۶۰
۶۳	۹۰۰	۲۸۰	۲۷۵/۸	۱/۵۰۶۱	۲۸۲/۸	۰/۹۹۴۳	۲۷۵/۰	۱/۷۷۳۱	۲۸۱/۸	۰/۶۴۱۹
۶۳	۱۰۰۰	۱۹۴	۱۸۴/۸	۴/۷۳۱۶	۱۹۲/۷	۰/۶۵۹۷	۱۷۹/۴	۷/۵۴۳۹	۱۸۹/۴	۲/۳۵۸۲
۶۳	۱۱۰۰	۱۱۱	۱۰۷/۴	۳/۲۳۸۸	۹۸/۱	۱۱/۶۰۲۶	۹۰/۶	۱۸/۳۶۴۲	۱۰۸/۴	۲/۳۲۷۷
۶۳	۱۲۰۰	۳۷	۵۲/۷	۴۲/۴۸۴۷	۳۰/۶	۱۷/۳۹۱۷	۲۹/۸	۱۹/۵۵۹۸	۵۰/۴	۳۶/۳۷۸۸
۹۸	۷۰۰	۵۳۴	۴۸۱/۹	۹/۷۵۰۶	۴۸۱/۹	۹/۷۵۰۶	۴۸۱/۹	۹/۷۵۰۶	۴۸۹/۴	۸/۳۴۱۹

۳۲/۲۱۹۴	۳۹۶/۶	۲۹/۳۰۳۳	۳۸۷/۹	۳۰/۶۵۷۲	۳۹۱/۹	۲۹/۳۸۰۶	۳۸۸/۱	۳۰۰	۸۰۰	۹۸
۱۴/۶۹۰۷	۳۰۴/۵	۱۷/۶۶۶۰	۲۹۳/۹	۱۴/۲۷۶۱	۳۰۶/۰	۱۷/۱۱۶۴	۲۹۵/۹	۳۵۷	۹۰۰	۹۸
۱۸/۷۶۴۹	۲۱۶/۱	۱۰/۳۵۲۷	۲۰۰/۸	۱۸/۵۴۰۸	۲۱۵/۷	۱۵/۰۱۷۴	۲۰۹/۳	۱۸۲	۱۰۰۰	۹۸
۳۰/۵۴۹۴	۱۳۸/۲	۴۲/۲۶۷۶	۱۱۴/۹	۳۸/۰۱۷۹	۱۲۳/۳	۳۲/۰۷۶۴	۱۳۵/۱	۱۹۹	۱۱۰۰	۹۸
۴۷/۴۸۸۰	۷۸/۶	۴/۵۰۸۵	۵۰/۶	۱/۴۵۹۴	۵۲/۲	۴۹/۰۴۶۳	۷۹/۰	۵۳	۱۲۰۰	۹۸
۰/۵۸۳۹	۵۰۲/۹	۱/۳۱۴۰	۴۹۳/۴	۱/۱۷۴۵	۴۹۴/۱	۱/۳۰۵۸	۴۹۳/۵	۵۰۰	۷۰۰	۱۲۶
۲۳/۲۴۴۵	۳۲۲/۳	۲۶/۴۸۳۱	۳۰۸/۷	۲۳/۱۰۵۱	۳۲۲/۹	۲۵/۷۷۶۵	۳۱۱/۷	۴۲۰	۹۰۰	۱۲۶
۳۲/۷۸۲۱	۲۳۶/۶	۳۸/۱۷۳۵	۲۱۷/۶	۳۳/۷۵۴۵	۲۳۳/۲	۳۵/۲۴۲۸	۲۲۷/۹	۳۵۲	۱۰۰۰	۱۲۶
۹/۱۱۰۶	۱۶۰/۴	۹/۳۰۵۶	۱۳۳/۳	۳/۱۱۸۱	۱۴۲/۴	۵/۸۱۰۶	۱۵۵/۵	۱۴۷	۱۱۰۰	۱۲۶
۶۸/۳۳۷۴	۲۸/۸	۹۰/۴۱۹۴	۸/۷	۸۴/۷۷۷۲	۱۳/۸	۶۴/۵۵۹۰	۳۲/۲	۹۱	۱۴۰۰	۱۲۶
۱۸/۰۱۰۱		۱۷/۵۲۹۶		۱۷/۲۴۰۹		۱۸/۵۰۸۷	میانگین خطا			

باتوجه‌به جدول (۷) در نماد شستا در سود در کلیهٔ حالات (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت) مدل کو خطای بسیار کمتری از سایر مدل‌ها دارد. درمجموع میانگین خطا، مدل گرام‌چارلیه خطای کمتری را از سه مدل دیگر در مقایسه با قیمت بازار نشان می‌دهد؛ از طرف دیگر مدل مرتون در حالت خنثی، در کلیهٔ حالات (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت) خطای بسیار بالایی در مقایسه با سایر مدل‌ها دارد.



شکل (۳): نمودار قیمت اختیار نماد شستا با مدل‌های بلک شولز، گرام‌چارلیه، مرتون و کو در مقایسه با بازار

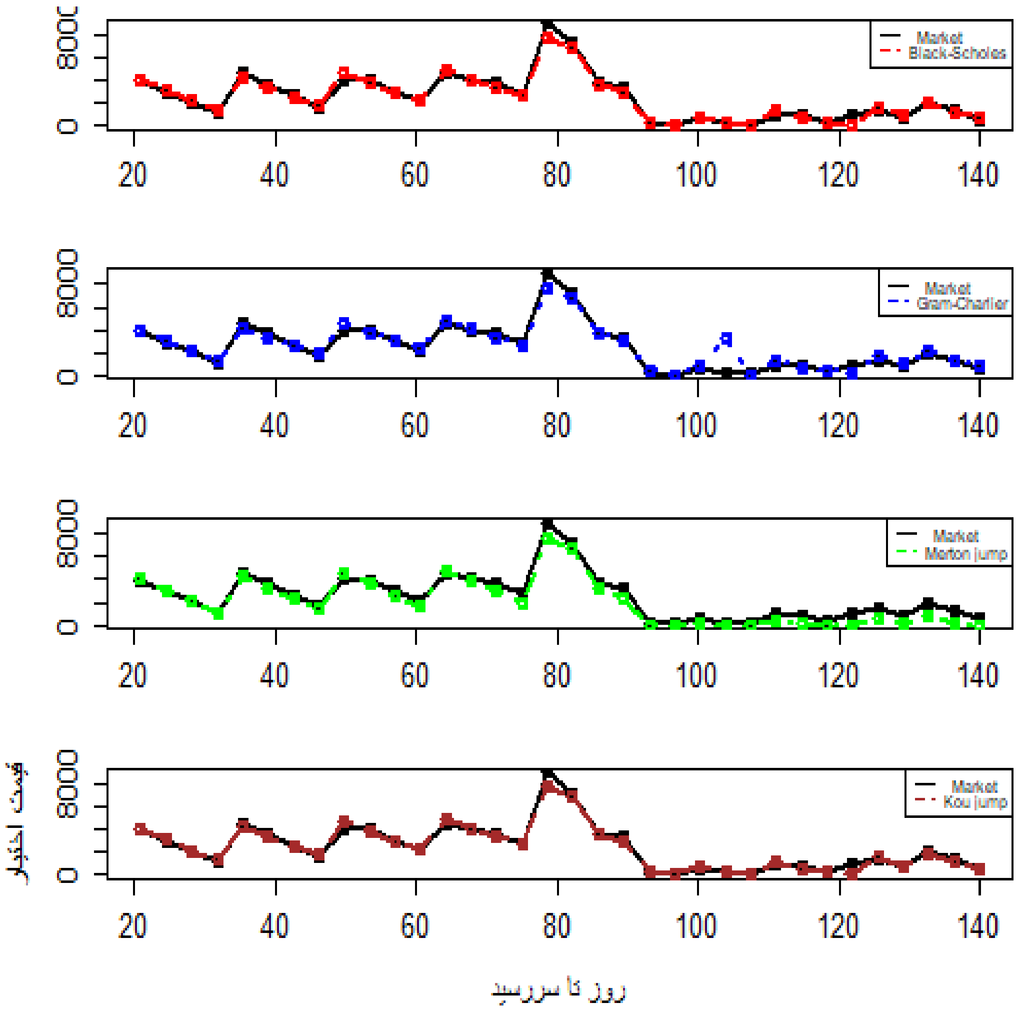
Figure (3): Shasta symbol option price chart with Black Scholes, Gram Charlier, Merton and Kou models compared to the market

جدول (۸): اختیار خرید اروپایی نماد اهرم با نوسان تاریخی در قیمت سهم ۱۶۸۶۰

Table (8): European call option of the Ahrom symbol with historical volatility in the share price of 16860

روز تا اعمال	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		گرام‌چارلیه		انتشار پرش مرتون		انتشار پرش کو	
			قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا
۲۱	۱۳۰۰۰	۳۹۶۹	۴۰۳۲/۶	۱/۶۰۱۶	۴۰۲۵/۶	۱/۴۲۷۳	۴۰۳۰/۹	۱/۵۵۹۴	۴۰۶۳/۳	۲/۳۷۵۰
۲۱	۱۵۰۰۰	۲۰۹۶	۲۱۳۳/۸	۱/۸۰۵۳	۲۱۰۹/۹	۰/۶۶۲۸	۲۰۵۷/۳	۱/۸۴۸۱	۲۱۴۲/۶	۲/۲۲۱۴
۲۱	۱۶۰۰۰	۱۱۰۲	۱۳۳۰/۸	۲۰/۷۵۹۵	۱۳۳۸/۵	۲۱/۴۶۵۱	۱۰۷۹/۳	۲/۰۵۸۷	۱۳۰۹/۴	۱۸/۸۲۰۷
۲۱	۱۸۰۰۰	۱۸۹	۳۴۱/۵	۸۰/۶۸۰۰	۳۸۷/۶	۱۰۵/۰۶۳۶	۲۳/۸	۸۷/۴۲۱۶	۲۹۴/۱	۵۵/۵۹۵۳
۲۱	۲۰۰۰۰	۴۴	۴۸/۸	۱۰/۸۳۶۵	۴۷/۷	۸/۴۶۳۶	۰/۴	۹۹/۱۰۲۲	۳۰/۲	۳۱/۳۸۶۴
۴۹	۱۳۰۰۰	۴۵۶۴	۴۲۸۲/۳	۶/۱۷۲۸	۴۲۵۲/۴	۶/۸۲۷۵	۴۲۵۵/۳	۶/۷۶۴۵	۴۳۴۰/۸	۴/۸۹۰۷
۴۹	۱۴۰۰۰	۳۶۴۴	۳۳۷۳/۰	۷/۴۳۷۹	۳۳۴۰/۷	۸/۳۲۲۳	۳۲۸۵/۷	۹/۸۳۲۷	۳۴۱۵/۲	۶/۲۷۸۱
۴۹	۱۵۰۰۰	۲۵۷۸	۲۵۳۸/۶	۱/۵۲۸۶	۲۵۲۸/۷	۱/۹۱۳۳	۲۳۱۷/۳	۱۰/۱۱۱۶	۲۵۵۲/۵	۰/۹۸۸۱
۴۹	۱۶۰۰۰	۱۶۷۱	۱۸۱۶/۶	۸/۷۰۹۳	۱۸۴۶/۷	۱۰/۵۱۶۷	۱۳۷۴/۳	۱۷/۷۵۲۴	۱۷۹۷/۰	۷/۵۴۲۵
۴۹	۱۸۰۰۰	۵۹۲	۷۹۳/۲	۳۳/۹۸۰۰	۸۷۲/۸	۴۷/۴۳۸۶	۱۶۰/۵	۷۲/۸۸۶۱	۷۳۰/۵	۲۳/۴۰۲۹
۴۹	۲۰۰۰۰	۲۱۳	۲۸۲/۲	۳۲/۴۵۷۱	۳۲۵/۳	۵۲/۷۲۴۴	۳/۶	۹۸/۳۱۲۴	۲۲۶/۷	۶/۴۵۴۰
۴۹	۲۲۰۰۰	۹۷	۸۳/۹	۱۳/۵۶۱۰	۸۱/۶	۱۵/۸۷۴۲	۰/۲	۹۹/۷۴۷۶	۵۳/۲	۴۵/۱۲۳۶
۸۴	۱۳۰۰۰	۴۰۰۰	۴۶۰۹/۰	۱۵/۲۲۵۴	۴۵۷۲/۸	۱۴/۳۲۰۸	۴۵۳۰/۲	۱۳/۲۵۵۵	۴۶۹۳/۶	۱۷/۳۴۰۶
۸۴	۱۴۰۰۰	۳۹۵۱	۳۷۶۱/۹	۴/۷۸۷۲	۳۷۳۸/۵	۵/۳۷۷۱	۳۵۸۲/۰	۹/۳۴۰۱	۳۸۲۳/۸	۳/۲۱۸۴
۸۴	۱۵۰۰۰	۲۹۹۰	۲۹۸۹/۲	۰/۰۲۷۹	۲۹۹۷/۶	۰/۲۵۵۲	۲۶۳۷/۵	۱۱/۷۸۹۶	۳۰۱۹/۵	۰/۹۸۶۹
۸۴	۱۶۰۰۰	۲۱۸۵	۲۳۱۰/۶	۵/۷۴۵۲	۲۳۵۹/۷	۷/۹۹۸۹	۱۷۲۵/۳	۲۱/۰۳۵۶	۲۳۰۶/۰	۵/۵۳۸۹
۸۴	۱۸۰۰۰	۹۲۷	۱۲۷۲/۵	۳۷/۲۷۱۶	۱۳۷۷/۲	۴۸/۵۷۰۲	۴۰۱/۲	۵۶/۷۲۵۴	۱۲۱۳/۴	۳۰/۸۹۶۰
۸۴	۲۰۰۰۰	۸۵۰	۶۳۴/۰	۲۵/۴۱۲۱	۷۲۳/۶	۱۴/۸۶۸۳	۳۳/۴	۹۶/۰۷۵۳	۵۵۸/۹	۳۴/۲۵۰۱
۸۴	۲۲۰۰۰	۳۵۰	۲۸۹/۹	۱۷/۱۷۴۵	۳۲۷/۹	۶/۳۰۲۰	۱/۷	۹۹/۵۱۰۱	۲۲۷/۱	۳۵/۱۲۵۶
۸۴	۲۴۰۰۰	۹۵۳	۱۲۳/۵	۸۷/۰۳۷۲	۱۲۰/۱	۸۷/۳۹۴۱	۰/۲	۹۹/۹۸۲۵	۸۰/۶	۹۱/۵۳۷۲
۱۱۲	۱۳۰۰۰	۴۵۸۹	۴۸۶۶/۹	۶/۰۵۵۸	۴۸۳۳/۹	۵/۳۳۵۹	۴۷۴۵/۹	۳/۴۱۸۴	۴۹۷۱/۱	۸/۳۲۵۸
۱۱۲	۱۴۰۰۰	۴۰۰۰	۴۰۵۶/۶	۱/۴۱۶۰	۴۰۴۳/۱	۱/۰۷۷۴	۳۸۱۴/۵	۴/۶۳۸۰	۴۱۳۶/۲	۳/۴۰۴۱
۱۱۲	۱۵۰۰۰	۳۷۰۰	۳۳۱۶/۴	۱۰/۳۶۸۱	۳۳۳۷/۲	۹/۸۰۴۳	۲۸۸۸/۵	۲۱/۹۳۲۵	۳۳۶۳/۵	۹/۰۹۴۴
۱۱۲	۱۶۰۰۰	۲۷۵۰	۲۶۵۹/۳	۳/۲۹۹۲	۲۷۲۰/۵	۱/۰۷۳۹	۱۹۹۵/۰	۲۷/۴۵۲۲	۲۶۷۱/۱	۲/۸۷۰۴
۱۱۲	۱۸۰۰۰	۱۴۰۰	۱۶۱۷/۶	۱۵/۵۴۰۱	۱۷۳۷/۰	۲۴/۰۷۲۲	۶۱۶/۴	۵۵/۹۷۳۲	۱۵۶۹/۱	۱۲/۰۸۰۷
۱۱۲	۲۰۰۰۰	۷۵۲	۹۲۰/۳	۲۲/۳۸۲۹	۱۰۳۷/۵	۳۷/۹۷۰۸	۹۱/۸	۸۷/۷۹۵۴	۸۴۲/۷	۱۲/۰۶۱۰
۱۴۰	۱۱۰۰۰	۷۲۰۰	۶۸۲۱/۱	۵/۲۶۴۱	۶۷۹۳/۰	۵/۶۵۱۹	۶۷۸۸/۸	۵/۷۱۰۵	۶۹۶۴/۹	۳/۲۶۵۴
۱۴۰	۱۵۰۰۰	۳۷۰۰	۳۶۲۱/۹	۲/۱۰۹۱	۳۶۵۳/۶	۱/۲۵۳۶	۳۱۳۴/۶	۱۵/۲۸۰۰	۳۶۸۷/۶	۰/۳۳۵۷
۱۴۰	۱۶۰۰۰	۳۳۰۰	۲۹۸۱/۴	۹/۶۵۴۷	۳۰۵۲/۸	۷/۴۹۱۷	۲۲۵۷/۲	۳۱/۶۰۱۰	۳۰۱۱/۶	۸/۷۴۰۲
۱۴۰	۱۸۰۰۰	۱۹۹۷	۱۹۳۹/۸	۲/۸۶۴۵	۲۰۷۱/۳	۳/۷۱۹۳	۸۴۱/۸	۵۷/۸۴۶۵	۱۹۰۶/۰	۴/۵۵۶۴
۱۴۰	۲۰۰۰۰	۱۳۰۰	۱۲۰۲/۹	۷/۴۷۲۱	۱۳۴۲/۰	۳/۲۳۱۹	۱۸۱/۴	۸۶/۰۴۴۴	۱۱۳۰/۱	۱۳/۰۷۰۴
۱۴۰	۲۲۰۰۰	۵۶۰	۷۱۶/۶	۲۷/۹۵۷۴	۸۱۹/۵	۴۶/۳۴۳۰	۲۳/۶	۹۵/۷۸۳۳	۶۳۱/۹	۱۲/۸۲۴۳
			میانگین خطا	۱۶/۰۴۱۴		۵۸/۹۴۹۳		۴۱/۹۷۱۱		۱۵/۶۶۱۸

باتوجه‌به جدول (۸) در نماد اهرم در ســود و خنثی در بیشــتر حالات (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت) مدل کو خطای بسـیار کمتری از سـایر مدل‌ها دارد. درمجموع میانگین خطا، مدل کو خطای کمتری را از سـه مدل دیگر در مقایسـه با قیمت بازار نشــان می‌دهد؛ از طرف دیگر مدل مرتون در حالت خنثی و ضـــرر، در کلیهٔ حالات (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت) خطای بسیار بالایی در مقایسه با سایر مدل‌ها از خود نشان می‌دهد.



شکل (۴): نمودار قیمت اختیار نماد اهرم با مدل‌های بلک شولز، گرام‌چارلیه، مرتون و کو در مقایسه با بازار

Figure (4): Option price chart of the Ahrom symbol with Black-Scholes, Gram-Charlier, Merton and Kou models compared to the market

باتوجه‌به چولگی منفی و کشیدگی بیش‌ازحد نماد شستا که از جدول (۱) به دست آمده است و براساس نتایج به‌دست‌آمده از جدول (۷) می‌توان نتیجه گرفت که در شرایط چولگی منفی و کشیدگی بیش‌ازحد داده‌ها، مدل گرام‌چارلیه مدل مناسب‌تری در مقایسه با مدل‌های پرش مثل مرتون و کو اسـت. باتوجه‌به چولگی و کشیدگی به‌نسبت پایین نماد اهرم که از جدول (۱) به دسـت آمده اسـت و براسـاس نتایج به‌دسـت‌آمده از جدول (۸) می‌توان نتیجه گرفت که در شـرایطی که چولگی و کشـیدگی داده‌ها کم اســت و داده‌ها رفتار نرمال‌تری دارند، مدل کو در کنار مدل بلک شــولز می‌تواند مدل مناســبی برای قیمت‌گذاری باشد؛ اما در این شرایط به سبب خطاهای بسیار بالای مدل مرتون این مدل پیشنهاد نمی‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

درمجموع پژوهش‌های داخلی محدودی درخصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی صورت پذیرفته است و پژوهش‌های موجود هم متمرکز فقط بر روی یکی از مدل‌ها است؛ برای نمونه کیمیاگری و آفریده‌ثانی (2008) و ابوالی و همکاران (2019) فقط معادلۀ بلک شولز را بررسی کردند. دو فرض اساسی در مدل بلک شولز ثابت‌بودن نوسان و تبعیت از توزیع نرمال بازده‌ها است که در بسیاری از شرایط واقعی بازار صدق نمی‌کند و رفتار واقعی بازار را نشان نمی‌دهد. بعضی از پژوهش‌های داخلی مثل نصرالهی و همکاران (2023) یا بهرادمهر و طهماسبی (2022) فرض عدم ثابت‌بودن نوسان را بررسی کرده‌اند و به فرض غیرنرمال بودن داده‌ها در آنها توجه نشده است. در بعضی از پژوهش‌ها ازجمله نبوی و بهرام‌زاده (2018)، محمدی‌نژاد و نیسی (2022) و پیمانی و همکاران (2023) نیز کارایی مدل پرش انتشار مرتون بررسی شده است؛ از طرف دیگر در پژوهش حدادی و نصرالهی (2024) نیز فقط به قیمت‌گذاری مدل گرام‌چارلیه توجه شده است. هدف اصلی این پژوهش تعیین قیمت اختیار خرید اروپایی در دارایی‌هایی است که توزیع بازدۀ داده‌های آنها غیرنرمال یا با پرش است؛ در این راستا قیمت اختیار در چهار مدل بلک شولز، گرام‌چارلیه، مدل پرش انتشار مرتون و مدل پرش انتشار کو با نوسان تاریخی در سررسیدهای مختلف و در حالت‌های در سود، بی‌تفاوت و در ضرر برای سه نماد خودرو، شستا و اهرم مقایسه شده است. قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با بسط گرام‌چارلیه با رویکرد چندجمله‌ای هرمیت به دست می‌آید.

نتایج این پژوهش نشان داد که قیمت اختیار در نماد شستا با استفاده از مدل گرام‌چارلیه بسیار بهتر از قیمت اختیار با مدل کو و مرتون است که این موضوع به سبب چولگی منفی و کشیدگی بیش‌ازحد است؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که در داده‌های با چولگی منفی و کشیدگی بیش‌ازحد مدل گرام‌چارلیه از مدل‌های پرش مرتون و کو نتایج بهتری دارد؛ اما درخصوص نماد خودرو، مدل مرتون قیمت دقیق‌تری برای اختیار در مقایسه با مدل گرام چارلیه و کو ارائه می‌دهد که این موضوع به سبب کشیدگی بالا است. درخصوص نماد اهرم نیز مدل کو قیمت دقیق‌تری برای اختیار در مقایسه با مدل گرام‌چارلیه و مرتون ارائه می‌دهد که این موضوع به سبب چولگی و کشیدگی نسبتاً نرمال است؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که در داده‌های نرمال یا در داده‌هایی که نرمال‌بودن آنها با آزمون رد شده است، اما چولگی و کشیدگی غیرنرمالی برآورد نمی‌شود، مدل کو مدل بسیار مناسبی است؛ از طرف دیگر در داده‌های غیرنرمال با فقط کشیدگی بالا و بدون چولگی، مدل مرتون می‌تواند مدل مناسبی برای قیمت‌گذاری باشد.

منابع

ابوالی، مهدی، خلیلی عراقی، مریم، حسن‌آبادی، حسن، و یعقوب‌نژاد، احمد (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اختیار معامله با روش تحلیلیِ جدید برای معادله بلک شولز. *راهبرد مدیریت مالی*، ۷(۳)، ۱۳۵–۱۵۵.
https://doi.org/10.22051/jfm.2019.21835.1763

احمدی، محمدرضا، و اسماعیلی، ندا (۱۴۰۲). اختیار معامله رنگین‌کمانی آسیایی هندسی در بازار بورس و اوراق بهادار ایران. *فصلنامه بورس اوراق بهادار*، ۱۶(۶۳)، ۱۴۹–۱۶۸. https://doi.org/10.22034/jse.2023.11852.1906

باغستانی، مریم، پیش‌بهار، اسماعیل، و دشتی، قادر (۱۳۹۷). قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو: مطالعه موردی کنجاله سویا. *اقتصاد کشاورزی (اقتصاد و کشاورزی)*، ۱۲(۳)، ۱–۲۶.
https://doi.org/10.22034/iaes.2018.33525

بهرادمهر، نفیسه، و طهماسبی، نرگس (۱۴۰۱). قیمت‌گذاری قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران: رویکرد بلک شولز و برابری خریدوفروش. *اقتصاد مالی (اقتصاد مالی و توسعه)*، ۱۶(۶۰)، ۶۹–۹۲.

پورحیدری، امید (۱۳۷۸). الگوی قیمت‌گذاری برگه‌های اختیار معامله. *تحقیقات مالی*، ۴(۱۳)، ۹۷–۱۲۵.

پیمانی، مسلم، امیری، میثم، و سکوت، سیدمحمد (۱۴۰۲). ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۳(۴۱)، ۹۱–۱۱۵.
https://doi.org/10.48308/jfmp.2023.103891

حاجی‌زاده، احسان، و ماهوتچی، مسعود (۱۳۹۸). مدلی بهینه‌سازی مبتنی‌بر شبیه‌سازی به‌منظور قیمت‌گذاری اوراق اختیار بسته‌ای. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)*، ۱۰(۳۸)، ۳۰۶–۳۲۷.

حدادی، محمدرضا، و نصرالهی، حسین (۱۴۰۳). اثر چولگی و کشیدگی بر قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت توزیع غیرنرمال. *مجله بورس اوراق بهادار*، ۱۷(۶۶)، ۲۹–۵۴. https://doi.org/10.22034/jse.2024.12400.2244

دارابی، رویا، و معروفخانی، مجید (۱۳۹۵). *ارزش‌گذاری ابزار نوین مالی*. *حسابرس*، (۸۲)، ۷۲–۷۹.

شاکران، زهرا (۱۳۹۱). ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی. *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها*، سمنان.

فرزانگان، الهام (۱۴۰۳). بررسی محتوای اطلاعاتی چولگی و کشیدگی توزیع بازدهٔ TEPIX برای پیش‌بینی ریسک: مدل GARCH با بسط‌های گرام–چارلیِر برای جملات اختلال. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۴(۴۵)، ۱۴۹–۱۷۴.
https://doi.org/10.48308/jfmp.2024.104895

فلاح‌پور، سعید، و مطهری‌نیا، وحید (۱۳۹۶). مدل‌سازی و پیش‌بینی نوسان تحقق‌یافته با در نظر گرفتن پرش در بورس اوراق بهادار تهران. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)*، ۸(۳۲)، ۱۷۱–۱۹۰.

کیمیاگری، علی‌محمد، و آفریده ثانی، احسان (۱۳۸۷). ارائه یک روش تلفیقی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله مبتنی‌بر دو مدل بلک شولز و درخت دوتایی (مطالعه موردی بازار بورس سهام ایران). *فصلنامه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید*، ۱۹(۴)، ۱۱۹-۱۲۷.

محمدی‌نژاد، ریحانه، و نیسی، عبدالساده (۱۴۰۱). قیمت‌گذاری اختیار گستره بر پایه مدل‌های نرخ بهره لایبور پرش–انتشار. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۲(۳۸)، ۳۵–۴۹. https://doi.org/10.52547/JFMP.12.38.35

نبوی چاشمی، سیدعلی، و بهرام‌زاده، راضیه (۱۳۹۷). بررسی کارایی فرایند لوی در قیمت‌گذاری اختیار معاملات. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، ۱۱(۳۸)، ۱۱۷–۱۲۷.

نصرالهی، حسین، حدادی، محمدرضا، وگودرزی، منیژه. (۱۴۰۲). مدل بلک شولز تعمیم‌یافته تحت نوسانات گارچ با محاسبه ارزش در معرض خطرشرطی در قیمت‌گذاری مشتقه. *راهبرد مدیریت مالی*، ۱۱(۴)، ۵۱–۷۰.
https://doi.org/10.22051/jfm.2023.43857.2828

References

Abdurakhman. (2019). The fifth-moment effect in Black-Scholes model and Its performance at market. *In Applied Mathematical Sciences*, 13(13), 617–622. https://doi.org/10.12988/ams.2019.9570

Abvali, M., Khalili, A., Hassanabadi, M., & Yaghoobnezhad, A. (2019). Optional trading pricing with a new analytic method for the Black-Scholes equation. *Journal of Financial Management Strategy*, 7(3), 135-155. https://doi.org/10.22051/jfm.2019.21835.1763 [In Persian].

Ahmadi, M. R., & Esmaili, N. (2024). Geometric Asian rainbow option on the Iranian Stock Market. *Journal of Securities Exchange,* 16(63), 149-168. https://doi.org/10.22034/jse.2023.11852.1906 [In Persian].

Baghestani, M., Pishbahar, E., & Dahsti, G. (2018). The pricing of Asian options using Monte Carlo simulation (Case study: Soybean meal). *Agricultural Economics*, 12(3), 1-26. https://doi.org/10.22034/iaes.2018.33525 [In Persian].

Bahradmehr, N., & Tahmasebi, N. (2022). Pricing the gold coin options of Iran Mercantile Exchange market: "Black Scholes" and "Put-Call Parity" approaches. *Journal of Financial Economics (Financial Economics and Development)*, 16(60), 69-92. [In Persian].

Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 8(3), 637-654.

Berberan-Santos, M. N. (2007). Computation of one-sided probability density functions from their cumulants. *Journal of Mathematical Chemistry*, 41, 71-77. https://doi.org/10.1007/s10910-006-9069-x

Chateau, J. P., & Dufresne, D. (2017). Gram-charlier processes and applications to option pricing. *Journal of Probability and Statistics*, 2017, 8690491, 1-19. http://dx.doi.org/10.1155/2017/8690491

Corrado, C. J., & Su, T. (1996). S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 16(6), 611-629. https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9934(199609)16:6<611::AID-FUT1>3.0.CO;2-I

Cupidon, J. R., & Hyppolite, J. (2022). An exchange rate model where the fundamentals follow a jump-diffusion process. *Cogent Economics & Finance*, 10(1), 2082025. https://doi.org/10.1080/23322039.2022.2082025

Darabi, R., & Marufkhani, M. (2016). Evaluation of new financial instruments. *Auditor*, 18(82) , 72-79. [In Persian].

Fallahpour, S. & Motaharinia, V. (2017). Including jump components in modeling and forecasting realized volatility: Evidence from Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Securities Management (Portfolio Management)*, 8(32), 171-190. [In Persian].

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34-105. https://doi.org/10.1086/294743

Farzanegan, E. (2024). Analyzing the information contained in the skewness and kurtosis of TEPIX returns for forecasting risk: GARCH model with Gram-Charlier expansions for innovations. *Financial Management Perspective*, 14(45), 149-174. https://doi.org/10.48308/jfmp.2024.104895 [In Persian].

Haddadi, M. R., & Nasrollahi, H. (2024). The effect of skewness and skewness on option pricing under non-normal distribution. *Journal of Securities Exchange*, 17(66), 29-54. https://doi.org/10.22034/jse.2024.12400.2244 [In Persian].

Hajizadeh, E., & Mahootchi, M. (2019). A simulation-based optimization model for pricing basket options. *Financial Engineering and Securities Management (Portfolio Management)*, 10(38), 306-327. [In Persian].

Hout, K. J. (2024). An efficient numerical method for American options and their Greeks under the two-asset Kou jump-diffusion model. *ArXiv Preprint ArXiv*:2410.10444. https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.10444

Hull, J. (1993). *Options, Futures, and other Derivative Securities*. Englewood Cliffs.

Laplace. (1811). Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement a la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les resultats des observations" [Memoire on definite integrals and their application to probabilities, and especially to the search for the mean which must be chosen among the results of observations]. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut Impérial de France*, 11, 297–347. [In French].

Jarrow, R., & Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of financial Economics*, 10(3), 347-369. https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90007-1

Jondeau, E., & Rockinger, M. (2001). Gram–charlier densities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(10), 1457-1483. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889(99)00082-2

Jondeau, E., Poon, S. H., & Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Science & Business Media. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-84628-696-4

Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *The Review of Financial Studies*, 1(4), 427-445.

Kimyagari, A. M., & Afridehsani, E. (2008). Suggestion a composed option pricing model based on Black-Scholes and binomial tree models (Case study in Tehran Stock Exchange). *International Journal of Industrial Engineering and Production Management (IJIE)*, 19(4), 119-127. [In Persian].

Knight, J. L., & Satchell, S. E. (1997). Existence of unbiased estimators of the Black/Scholes option price, other derivatives, and hedge ratios. *Econometric Theory*, 13(6), 791-807.

Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management s Science*, 48(8), 1086-1101.

Lorig, M., & Lozano-Carbassé, O. (2012). Exponential L\'evy-type models with stochastic volatility and stochastic jump-intensity, *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1205.2398

Mandelbrot, B. B. (1997). The variation of certain speculative prices. In *Fractals and Scaling in Finance* (pp. 371-418). Springer, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2763-0_14

Maruddani, D. A. I., & Safitri, D. (2019). The effect of extreme asset prices to the valuation of zero coupon bond with jump diffusion processes. *Journal of Physics: Conference Series*, 1217(1), 012075. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1217/1/012075

Matsuda, K. (2004). *Introduction to Merton Jump Diffusion Model*. Department of Economics, The Graduate Center, The City University of New York.

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial*

Economics, 3(1-2), 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2
Mohammadinejad, R., & Nisi, A. (2022). Spread option pricing based on two Jump-diffusion libor interest rate models. *Financial Management Perspective*, 12(38), 35-49. https://doi.org/10.52547/JFMP.12.38.35 [In Persian].
Nabavi, C. S. A., & Bahramzade, R. (2018). Survey of efficiency Levy process in pricing options. *Financial Knowledge of Security Analysis (Financial Studies)*, 11(38), 117-127. [In Persian].
Nandi, S. (1996). *Pricing and Hedging Index Options Under Stochastic Volatility: An Empirical Examination*. FRB Atlanta Working Paper 96-9, Federal Reserve Bank of Atlanta.
Nasrollahi, H., Haddadi, M. R., & Guderzi, M. (2023). Generalized Black-Scholes model under Garch volatility with conditional value-at-risk calculation in derivative pricing. *Financial Management Strategy*, 11(4), 51-70. https://doi.org/10.22051/jfm.2023.43857.2828 [In Persian].
Nthiwa, J. K., Kube, A. O., & Omari, C. O. (2023). A Jump Diffusion Model with Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility for Pricing Vulnerable Options. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2023(1), 2746415. https://doi.org/10.1155/2023/2746415
Ord, K., & Stuart, A. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics: Distribution Theory*. John Wiley & Sons.
Peymani, M., Amiri, M., & Sekot, S. M. (2023). Valuation of option bonds with random interest rate in Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspective*, 13(41), 91-115. https://doi.org/10.48308/jfmp.2023.103891 [In Persian].
Pourhaidari, O. (1999). The pricing model of trading options. *Financial Research*, 4(13), 97-125. [In Persian].
Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771-818. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x
Sepp, A. & Skachkov, I. (2003). Option Pricing with Jumps. *Wilmott Magazine*, 50-58.
Shakran, Z. (2012). Valuation of American trading options under stochastic turbulence. *The Third Conference of Financial Mathematics and Applications*, Semnan, Semnan University. [In Persian].
Supandi, E. D., Rosadi, D., & Abdurakhman. (2017). Improved Robust Portfolio Optimization. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 11(2), 239–260.
Utama, R. C., Hilnie, A. M. F., & Siswahyudi, W. A. (2022). European put option pricing model with Gram-Charlier expansion in third moments. *Perwira Journal of Science & Engineering*, 2(1), 41-49. https://doi.org/10.54199/pjse.v2i1.118
Zoia, M. G., Vacca, G., & Barbieri, L. (2020). Modeling multivariate financial series and computing risk measures via Gram–Charlier-Like expansions. *Risks*, 8(4), 123. https://doi.org/10.3390/risks8040123