https://amf.ui.ac.ir

Journal of Asset Management and Financing
E-ISSN: 2383-1189
Vol. 11, Issue 4, No. 43, Winter 2024, p 47- 64
Received: 13/11/2023 Accepted: 02/03/2024

Research Paper

Option Pricing Error: Evidence from Nonlinear Markets based on Probabilistic Neural Networks and Multilayer Perceptron

Mohammad Hossein Seifi
MSc Student, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
mh.Seifi79@gmail.com

Elham Dastranj*
Associate Professor, Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
elham.dastranj@shahroodut.ac.ir

Abdolmajid Abdolbaghi
Assistant Professor, Department of Management, Faculty of Industrial Engineering and Management, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

Sanaz Lamei
Assistant Professor, Department of Mathematical Sciences, University of Guilan, Rasht, Iran
lamei@guilan.ac.ir

Abstract
This sudy aims to compare the pricing error of Barles-Soner and Bakstein-Howison equation, in the S&P500 index option market. Option pricing equations are solved using Lie algebra. Using the historical data of the S&P500 index from August 18, 2022, to August 18, 2023, the price of this asset has been calculated with each model considered. In the sequel, the obtained data are classified using multilayer Perceptron and Probabilistic neural networks. The networks show which model is closest to the real market. In addition, the prices obtained from Lie algebra have been compared with the actual values of the options in the market. PNN and MLP have been tested with statistical data after August 18, 2023. Two assumed models were priced with the same data and then compared with the real market. In testing the networks, MLP put 60% of the test data and PNN put all the data into the Barels-Soner category. By calculating the difference between the results of the Lie groups and the real data, 80% of the data were less different from the Barrels-Soner model. With the results obtained in S&P option pricing, the Barels-Soner model has less error than other models.
Keywords: Nonlinear Markets, Lie Groups, Neural Networks, Options.

Introduction

Options are created to manage risk, control, and prevent loss. In trading, one party's gain means the other party's loss. To eliminate these gains and losses, option pricing must be fair. In other words, the price must be determined so that neither party suffers a loss. In this study, two nonlinear models Barles-Soner (Barles, 1998) and Bakstein-Howison (Bakstein, 2003) were used. By including transaction costs, these two models are closer to market reality than the Black-Scholes model. According to the two models, European option pricing was performed using Lie and symmetric groups. In this method, by order reduction, the partial differential equation is converted into a solvable ordinary differential equation. After evaluating two nonlinear Black-Scholes models, their responses are classified using a Probabilistic neural network (Specht, 1990) and a multilayer Perceptron, and it is predicted that the market is closer to which model.

In the section part, after introducing the two nonlinear Black-Scholes models, the basic concepts, and theoretical foundations of Lie groups, Probabilistic neural networks, and Perceptron are stated. In the second part, the method used in the research is explained. In this section, after finding the exact solutions of the equations of Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003), the European the S&P500 index option is priced. The findings obtained from this pricing are presented in the next section and finally, the results obtained in this research are presented in the last section.

*Corresponding author
Seifi, M. H., Dastranj, E., Abdolbaghi, A., & Lamei, S. (2024). Option pricing error: Evidence from nonlinear markets based on probabilistic neural networks and multilayer perceptron. *Journal of Asset Management and Financing*, *11*(4), 47-64.

2383-1189 © University of Isfahan
This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

https://doi.org/10.22108/amf.2024.139784.1838

Materials and Methods

The pricing of the European option on the S&P500 index has been done using false groups, based on the nonlinear equations of Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003). Next, Perceptron and Probabilistic neural networks were explained. To find the exact solution, Lie and symmetry groups were used. In this method, by order reduction, the partial differential equations are converted into ordinary differential equations. Then, an exact solution of this equation is provided by solving ordinary differential equations. Then by flowing the solutions, other new solutions were found (Dastranj & Hejazi, 2017).

Neural networks consist of three layers. The three main layers of all models are the input layer, hidden layer, and output layer. In some models, the hidden layer is divided into multiple layers. Each layer has several nodes whose number is tested in the hidden layer by trial and error. All nodes in each layer are connected to the next and previous layers. This relationship is established by the weights being multiplied by the previous layer's output, and the result is considered as the input of the current layer. The most important process in a neural network is learning and training the network. The goal of training the network is to accurately determine the weights so that the network output is closer to the true value of the output (Hagan, 1997).

After pricing with the solutions obtained from Lie algebra, we classify the data using neural networks to determine which model is closest to the actual market price.

Findings

Table 1 presents the results of market model prediction by comparing Lie Algebra Pricing, PNN, and MLP.

Table 1. Market Model Prediction by Comparing Lie Algebra Pricing, PNN, and MLP

x	t	Market price	Barles-Soner	Error	Bakstein-Howison	Error	Lie algebra	PNN	MLP
4467.71	0.087649	2488.09	2597.26	109.17	2644.69	156.60	0	0	0
4404.33	0.087302	2446.57	2596.79	150.22	2607.17	160.60	0	0	0
4518.44	0.134387	2511.83	2602.91	91.08	2674.72	162.89	0	0	0
4399.77	0.114173	2379.87	2599.80	219.93	2604.47	224.60	0	0	1
4405.71	0.186508	2405	2608.06	203.06	2607.99	202.99	1	0	1

In Table 1, x is the S&P500 index and t is the remaining time until the option expires. Using the following equation and for the values of x and t presented in Table 1, pricing was done under the Barles-Soner (1998) model, the result of which is presented in the column related to Barles-Soner (1998).

$$B(x,t)=\frac{e^{rt-\epsilon}}{a^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-rT}\ln(xe^{-rt\epsilon})+\frac{1}{2}\ln\left(xe^{rt\epsilon(-1+\exp(-\epsilon))}\right)e^{-Tr+\epsilon}-\frac{1}{4}t\left(-\frac{\sigma^2}{2}+r\right)e^{-Tr+\epsilon}+\frac{3}{4}\left(-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)te^{-Tr-\epsilon}-\frac{1}{2}rte^{-rT}+a^2c\right].$$

In the Bakstein-Howison column, the pricing solutions of the Bakstein-Howison (2003) are described with the following equation.

$$\mathrm{H(x,t)}=\frac{\mathrm{xe}^{(\mathrm{rte}^{-\epsilon}-1)\epsilon}}{\rho(\mathrm{rte}^{-\epsilon}-1)}\left[\frac{1}{4}\left((-1+\ln(\mathrm{xe}^{-\mathrm{rt}\epsilon}))\mathrm{e}^{-\epsilon(\mathrm{rt}\exp(-\epsilon)+\mathrm{rt}-1)}-\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mathrm{r}\right)\mathrm{te}^{-\mathrm{rt}\epsilon(\exp(-\epsilon)+1)}\right)+\mathrm{te}^{-\epsilon(\mathrm{rt}+1)}\left(\mathrm{c}\rho+\frac{\sigma^2}{8}+\frac{\mathrm{r}}{4}\right)-\mathrm{e}^{-\mathrm{rt}\epsilon}\left(\mathrm{c}\rho+\frac{\ln(\mathrm{xe}^{-\mathrm{rt}\epsilon})}{4}-\frac{1}{4}\right)\right].$$

Finally, the differences between the solutions under the two mentioned models have been compared with the real market prices, and the results are presented in the column related to Lie algebra. When the Barles-Soner (1998) price is closer to the market price, zero is placed in the table, and if the Bakstein-Howison (2003) price is close to it, one is placed. PNN and MLP columns show the results of Probabilistic neural networks and multilayer Perceptron, respectively. In these two columns, the one in the table indicates that the data is in the Bakstein-Howison (2003) category, and the zero is used to indicate that the data belongs to the Barles-Soner (1998) category.

Discussion and Conclusions

First, using Lie and symmetric groups for two nonlinear models, Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003), European option pricing was performed. After pricing the S&P500 index between August 18, 2022, and August 18, 2023, a multi-layer perceptron and probabilistic neural network were trained and the data were classified into two classes, Barles -Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003). Then, to find the model closest to the real market, the network is tested with 5 data points. Additionally, the answers obtained from the Lie algebra are evaluated using test data, and their differences from the real data are calculated to determine which answer is closest to the real data. The Perceptron neural network assumes that 3 out of 5 data items belong to the Barles-Soner (1998) model and the Probabilistic neural network places those 5 data items into the Barles-Soner (1998) category. By calculating the difference between the Lie group's response and the actual market price, 4 out of 5 data are close to the Barles-Soner (1998) model. Therefore, according to the results obtained, the S&P500 options market with a maturity of one year and an exercise price of 2,000 USD is close to the Barles-Soner (1998) model.

مدیریت دارایی و تأمین مالی
سال یازدهم، شماره چهارم، شماره پیاپی (۴۳)، زمستان ۱۴۰۲، ص۴۷- ۶۴
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۲

مقاله پژوهشی

خطای قیمت‌گذاری اختیار معامله: شواهدی از بازارهای غیرخطی مبتنی بر شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه

محمدحسین سیفی
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
Mh.Seifi79@gmail.com
الهام دسترنج*
دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
elham.dastranj@shahroodut.ac.ir
عبدالمجید عبدالباقی
استادیار، گروه مدیریت، دانشکدهٔ مهندسی صنایع و مدیریت، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
abdolbaghi@shahroodut.ac.ir
ساناز لامعی
استادیار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
lamei@guilan.ac.ir

چکیده

هدف: هدف از انجام این پژوهش مقایسهٔ خطای قیمت‌گذاری دو مدل بارلز-سونر و باکستین-هاویسون در بازار اختیار معاملهٔ شاخص S&P500 است. این مقایسه برای مشخص‌کردن نزدیک‌ترین مدل به بازار اختیار معامله[1] انجام شده است.

روش: در ابتدا پس از معرفی دو مدل بارلز-سونر و باکستین-هاویسون به حل معادلات دیفرانسیل جزئی با گروه‌های لی پرداخته شده است. سپس با داده‌های تاریخی شاخص S&P500 از ۱۸ آگوست ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوست ۲۰۲۳، قیمت اختیار معامله این دارایی تحت هر دو مدل محاسبه شده است. سپس داده‌های به‌دست‌آمده با شبکه‌های عصبی پرسپترون چندلایه و احتمالی دسته‌بندی شده‌اند. بعد از آموزش، شبکه‌ها با ارائهٔ داده‌های آزمون بررسی شده و نشان داده‌اند که بازار به کدام مدل نزدیک‌تر است. در ادامه، علاوه‌بر دسته‌بندی داده‌ها با شبکه‌های عصبی، به روش جبرلی به قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ S&P500 پرداخته و جواب حاصل با مقادیر واقعی اختیار معامله در بازار مقایسه شده است.

یافته‌ها و نوآوری: با داده‌های آماری بعد از ۱۸ آگو ست ۲۰۲۳، شبکه‌های ع صبی احتمالی و پر سپترون چندلایه آزموده شده‌اند. سپس به‌کمک همان داده‌ها معادلات بارلز-سونر و باکستین-هاویسون قیمت‌گذاری و اختلاف آنها از قیمت واقعی بازار محاسبه شده است. در آزمودن شبکه‌ها، شبکهٔ عصبی پرسپترون چندلایه ۶۰ درصد از داده‌های آزمون و شبکهٔ عصبی احتمالی تمامی داده‌ها را در دسته بارلز-سونر قرار داد. در محاسبهٔ اختلاف جواب‌های گروه‌های لی با داده‌های واقعی بازار، ۸۰ درصد داده‌ها اختلاف کمتری با مدل بارلز-سونر داشت. درنتیجه، قیمت واقعی اختیار معاملهٔ S&P500 در بازار به مدل بارلز-سونر نزدیک‌تر بوده است. به‌عبارت دیگر، در این بازار مدل بارلز-سونر خطای کمتری نسبت‌به مدل باکستین-هاویسون داشته است.

کلید واژه‌ها: بازارهای غیرخطی، گروه‌های لی، شبکه‌های عصبی، اختیار معامله.

[1] Option

* نویسندهٔ مسئول

سیفی، محمدحسین، دسترنج، الهام، عبدالباقی عطاآبادی، عبدالمجید، لامعی، ساناز. (۱۴۰۲). خطای قیمت‌گذاری اختیار معامله: شواهدی از بازارهای غیرخطی مبتنی بر شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چند لایه. *مدیریت دارایی و تامین مالی، ۱۱ (۴)، ۴۷- ۶۴.*

2383-1189 © University of Isfahan
This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

https://doi.org/10.22108/amf.2024.139784.1838

مقدمه

وجود ریسک در بازارها سبب شده است تا مهندسین مالی برای مدیریت و کاهش ریسک ابزارهای مالی جدیدی ایجاد کنند و ابزارهای قبلی را نیز توسعه دهند (Cuthbertson & Nitzsche, 2001). یکی از این ابزارها قراردادهای آتی اختیار معامله است. اختیار معامله، قراردادی است که اختیار انجام معامله خرید یا فروش را به خریدار آن می‌دهد. شرایط این معامله که در آینده انجام می‌شود در زمان حال تعیین می‌شود و از آنجایی که قیمت‌گذاری این قرارداد براساس قیمت دارایی پایه انجام می‌شود به آن ابزار مشتقه نیز می‌گویند. به قیمت توافق شده در هنگام عقد قرارداد برای خرید یا فروش دارایی پایه، قیمت اعمال[1] و به تاریخ تعیین شده برای انجام معامله، تاریخ انقضا[2] گویند (دسترنج و همکاران، ۱۳۹۹؛ Hull et al., 2017).

اختیار معامله به دو دستهٔ اختیار خرید و فروش تقسیم می‌شود. خریدار اختیار خرید اختیار آن را دارد که در تاریخ انقضای قرارداد دارایی پایه را به قیمت توافق‌شده بخرد یا نخرد و خریدار اختیار فروش این اختیار را دارد که دارایی پایه را بفروشد یا نفروشد. فروشندهٔ اختیار خرید یا فروش اختیاری برای انجام معامله ندارد و متعهد است که تحت هر شرایطی این معامله را بنابه درخواست خریدار انجام دهد. اختیار معامله براساسِ دارایی پایه به اختیار معامله روی سهام، کالا، شاخص و... تقسیم می شود. اختیار معامله ازنظرِ اعمال قرارداد مدل‌های مختلفی دارد، مانند اختیار معاملهٔ اروپایی، آمریکایی، اسپرد و... . اختیار اروپایی مدلی از اختیار است که خریدار آن تنها می‌تواند در لحظهٔ توافق‌شده در آینده معامله را اجرا کند نه زودتر یا دیرتر از زمان مقرر (تهرانی و همکاران، ۱۳۹۹؛ Hull et al., 2017).

معامله‌گری در بازارهای مالی یک بازی مجموع صفر است (Bjork, 2020)؛ یعنی مجموع سود و زیان معامله‌گران برابر است با صفر. در هر معامله کسب سود یک طرف به معنای ضرر طرف مقابل است. اختیار معامله با هدف مدیریت ریسک و برای کنترل و جلوگیری از زیان ایجاد شده است. در معامله برای جلوگیری از زیان نباید فرصت کسب سود به معامله‌گران دیگر داده شود. برای از بین رفتن این سود و زیان‌ها قیمت‌گذاری اختیار باید عادلانه باشد. به‌عبارتی قیمت به‌گونه‌ای تعیین شود که هیچ‌کدام از طرفین معامله ضرر نکنند.

بلک و شولز موفق شدند بازار را با معادلهٔ دیفرانسیلی تصادفی مدل سازی کنند و با آن به قیمت‌گذاری بپردازند (Black & Scholes, 1973). با ارائهٔ مدل بلک‌ـشولز (Black & Scholes, 1973) تحولی در بازار ایجاد شد؛ اما وجود فرض‌هایی برای این مدل باعث شد که پس از مدتی کارایی خود را از دست بدهد. برای رفع ناکارآمدی این مدل، مدل‌های جدیدی ارائه شده است که به واقعیت بازار نزدیک‌تر هستند. مدل‌های بازار را می‌توان به دسته‌های مختلفی تقسیم کرد. بعضی از مدل‌ها با الگوبرداری از مدل بلک‌ـشولز (1973) هزینه‌های معاملاتی را در قیمت‌گذاری لحاظ کردند. برخی دیگر نرخ بهره را ثابت فرض نکردند و مدل‌هایی تلاطم بازار را تصادفی درنظر گرفتند.

در بازارهای مالی معامله‌گران بزرگ با حجم‌های معاملاتی بالا تا حدودی روند و مدل بازار را مشخص می‌کنند. تمام این معامله‌گران از یک مدل استفاده نمی‌کنند؛ بنابراین، در هر دوره بازار به یک مدل شباهت بیشتری دارد. با اهمیت یافتن قیمت‌گذاری اختیار معامله و پیروی بازار از چندین مدل در یک دورهٔ زمانی، شبکه‌های عصبی می‌توانند مشخص کنند بازار به کدام یک از این مدل‌های قیمت‌گذاری نزدیک‌تر است.

یکی از قابلیت‌های انسان آموزش دیدن و استفاده از آموزش‌ها در تصمیمات خود است. ازاین‌رو، پژوهش‌گران با پژوهش روی سلول‌های عصبی مغز، اقدام به ساخت ابزاری کردند که با آموزش دیدن و کسب تجربه بتواند در تصمیم‌گیری‌ها به آنها کمک کند و خطاهای آنها را کاهش دهد. با انجام پژوهش‌ها روی این ایده، سرانجام اولین مدل از شبکه‌های عصبی مصنوعی ایجاد شد که

[1] Exercise Price
[2] Exercise Date

قابلیت آموزش دیدن و یادگیری داشت. از شبکه‌های عصبی در تشخیص دست خط، سرطان، پیش‌بینی برخی پدیده‌ها و... استفاده می‌شود. با پیشرفت علم و افزایش نیاز به کاربردهای مختلفی از شبکه‌های عصبی، مدل‌های جدیدی به وجود آمدند که دقت و سرعت یادگیری بالاتر و کاربردهای متنوع‌تری نسبت‌به مدل‌های اولیه ارائه می‌دهند (Hagan et al., 1997).

در این پژوهش از دو مدل غیرخطی بارلز-سونر (Barles & Soner, 1998) و باکستین-هاویسون (Bakstein & Howison, 2003) استفاده شده است. این دو مدل با احتساب هزینه‌های معاملاتی، نسبت‌به مدل بلک-شولز به واقعیت بازار نزدیک‌تر شده‌اند. تحت دو مدل ذکر شده با کمک گروه‌ها و تقارن‌های لی قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ اروپایی انجام شده است. در این روش با کاهش مرتبه معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، که حل‌شدنی است، تبدیل شده است. اختیار معاملهٔ اروپایی مدلی از اختیار است که تا لحظهٔ سررسید قرارداد نمی‌توان آن را اعمال کرد. بعد از قیمت‌گذاری، با کمک شبکه‌های عصبی به دسته‌بندی داده‌های قیمتی به‌دست‌آمده پرداخته شده است. در این مقاله از شبکه‌های عصبی احتمالی[1] (Specht, 1990) و پرسپترون چندلایه[2] برای دسته‌بندی داده‌های قیمتی استفاده شده است. شبکهٔ عصبی پرسپترون که یکی از پرکاربردترین شبکه‌های ایجاد شده در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ است. برای پیش‌بینی، تخمین تابع و دسته‌بندی استفاده می شود. این شبکه محدودیت‌هایی داشت که در دههٔ ۱۹۸۰ با ارائهٔ شبکهٔ پرسپترون چندلایه برطرف شد (Hagan et al., 1997). شبکهٔ عصبی احتمالی یک شبکهٔ عصبی است که مختص دسته‌بندی داده‌ها است. یکی از مزیت‌های شبکهٔ عصبی احتمالی این است که نیاز به آموزش ندارد. این مزیت باعث بالا رفتن سرعت‌عمل شبکه می‌شود. پس از قیمت‌گذاری بازار با دو مدل غیرخطی بلک-شولز جواب‌های آن با شبکه‌های عصبی دسته‌بندی شده است و پیش‌بینی شده که بازار به کدام مدل نزدیک‌تر است.

در ادامه و در بخش اول، بعد از معرفی دو مدل بلک-شولز غیرخطی مفاهیم اولیه و مبانی نظری گروه‌های لی و شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون بیان شده است. در بخش دوم، روش به‌کار رفته در پژوهش توضیح داده شده است. در این بخش بعد از پیدا شدن جواب‌های دقیق معادلات بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) اختیار معاملهٔ اروپایی شاخص S&P500 قیمت‌گذاری شده است. یافته‌های به‌دست‌آمده از این قیمت‌گذاری در بخش بعد ارائه و درنهایت نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش بیان شده است.

مبانی نظری

برای قیمت‌گذاری بازار از دو مدل غیرخطی بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) استفاده شده است. بارلز و سونر با پیروی از رویکرد تابع سودمندی هاجز (Hodges, 1989)، که دیویس و همکاران آن را توسعه دادند (Davis et al., 1993)، از یک تابع مطلوب نمایی استفاده و با استفاده از نظریهٔ کنترل بهینه تصادفی ثابت کردند (Fleming & Soner, 1993) که وقتی ϵ و κ به 0 بروند، B جواب منحصربه‌فرد زیر را دارد.

$$B_t + \frac{1}{2}x^2\tilde{\sigma}^2 B_{xx} + rxB_x - rB = 0, \qquad (۱)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + \Psi(e^{r(T-t)}a^2x^2B_{xx})), \qquad (۲)$$

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x)+1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \quad x \neq 0, \quad \Psi(0) = 0,$$

[1] Probabilistic Neural Network
[2] Multilayer Perceptron Neural Network

که در آن x قیمت دارایی پایه، r نرخ بهرهٔ بدون ریسک، σ تلاطم بازار، t زمان باقی‌مانده تا سررسید، T زمان سررسید، $a = \frac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}$ و κ نشان‌دهندهٔ هزینهٔ تراکنش رفت و برگشت به‌ازای هر واحد دلار معامله‌شده است و برای مقادیر بزرگ x، $\Psi(x) = x$. بنابراین،

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + e^{r(T-t)}a^2x^2B_{xx}), \quad (۳)$$

(Ankudinova & Ehrhardt, 2008) و معادلهٔ مدل غیرخطی بارلز-سونر (1998) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$B_t + \frac{1}{2}e^{r(T-t)}a^2x^4\sigma^2B_{xx}^2 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2B_{xx} + rxB_x - rB = 0. \quad (۴)$$

معادلهٔ مدل باکستین-هاویسون (2003) با پارامتر نقدینگی ρ و متغیرهای مشابه معادلهٔ بارلز-سونر (1998) به‌صورت زیر است:

$$H_t + \frac{1}{2}x^2\sigma^2H_{xx} + x^3\sigma^2\rho H_{xx}^2 + rxH_x - rH = 0. \quad (۵)$$

اهمیت قیمت‌گذاری صحیح اختیار معامله سبب شده است که پژوهش‌های زیادی مانند مهردوست (Mehrdoust et al., 2022) و سامیمیا (Samimia & Mehrdoust, 2022) دراین‌باره انجام شود. در این مقاله از روش‌های گروه‌های لی و شبکه‌های عصبی استفاده شده است. گروه‌ها و تقارن‌های لی یک روش هندسی برای پیدا کردن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. در مقالات نادری‌فرد (Naderifard et al., 2018) و حبیبی (Habibi et al., 2019) از گروه ها و تقارن‌های لی برای یافتن جواب‌های دقیق و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده شده است.

از شبکه‌های عصبی برای دسته‌بندی داده‌های به‌دست‌آمده از جواب‌های دقیق تقارن‌های لی استفاده شده است. به‌طورکلی، شبکه‌های عصبی از سه لایه تشکیل می‌شوند. سه لایهٔ اصلی تمامی مدل‌ها لایهٔ ورودی، پنهان و خروجی هستند. لایهٔ پنهان در بعضی از مدل‌ها به چند لایه تقسیم می‌شود. هر لایه چند گره دارد که تعداد آنها در لایهٔ پنهان با آزمون و خطا بررسی می‌شود. تعداد کم گره‌ها دقت شبکه را پایین می‌آورد و تعداد زیاد آنها زمان یادگیری را بالا می‌برد و هزینه‌های شبکه را افزایش می‌دهد. تمامی گره‌های هر لایه با لایه بعد و قبل خود در ارتباط است. این ارتباط را وزن‌هایی برقرار می‌کنند که در خروجی‌های لایهٔ قبل ضرب شده‌اند و حاصل آن ورودی لایهٔ فعلی خواهد بود. خروجی هر لایه به‌نسبت وزن‌های ارتباطی بین گره‌های لایهٔ فعلی تقسیم می‌شوند.

مهمترین فرآیند در شبکهٔ عصبی یادگیری و آموزش شبکه است. هدف از یادگیری شبکه تعیین درست وزن‌ها است، به‌گونه‌ای که خروجی شبکه به‌مقدار واقعی خروجی نزدیک‌تر شود و شبکه به حداقل خطای خروجی برسد (Hagan et al., 1997).

دسته‌بندی داده‌ها یکی از کاربردهای مهم و اصلی شبکه‌های عصبی است. در تان (Tan et al., 2022) به‌دلیل سخت بودن تشخیص خرابی نشت گاز با شبکه‌های عصبی احتمالی به دسته‌بندی خطای حسگر نشت گاز پرداخته شده است. پیش‌بینی دقیق کاهش ظرفیت باتری برای مدیریت سلامت باتری حیاتی است. در چه (Che et al., 2022) با شبکه‌های عصبی روش جدیدی برای بالا بردن دقت پیش‌بینی سلامت باتری پیشنهاد شده است. در این پژوهش علاوه‌بر شبکهٔ عصبی احتمالی، شبکه پرسپترون چندلایه نیز استفاده شده است. در طلعتیان آزاد (Talatian et al., 2022) روشی مؤثر برای تشخیص سرطان بیان شده است. در روش معرفی‌شده با شبکهٔ عصبی پرسپترون چندلایه، داده‌های پزشکی و اطلاعات مرتبط به سرطان طبقه‌بندی شده است. بعد از پیدا شدن جواب‌های دقیق معادلات بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003)، اختیار معاملهٔ اروپایی شاخص S&P500 قیمت‌گذاری شده است. پیش از این در بهنداری (Bhandari et al., 2022) با شبکهٔ عصبی LSTM

به پیش‌بینی قیمت پایانی شاخص S&P500 پرداخته شده است. در این مقاله نشان داده شده است که شبکهٔ عصبی LSTM [1] تک‌لایه پیش‌بینی قوی‌تری نسبت‌به شبکه LSTM چندلایه دارد.

روش پژوهش

در این بخش ابتدا با استفاده از گروه‌های لی تحت معادلات غیرخطی بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ اروپایی شاخص S&P500 انجام و جواب‌های دقیق آنها بیان شده است. سپس شبکه‌های عصبی پرسپترون و احتمالی توضیح داده شده‌اند. برای یافتن جواب‌های دقیق قیمت‌گذاری از گروه‌ها و تقارن‌های لی استفاده شده است. در این روش با کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در ابتدا سیستم معادلهٔ دیفرانسیلی از مرتبهٔ β با متغیر مستقل x^i، $1 \le i \le n$ و متغیر وابسته u^β، $1 \le \beta \le m$ به‌صورت زیر فرض شده است:

$$\Delta^f(x^i, u^\beta, u^\beta_i, u^\beta_{ij}, \dots) = 0, \qquad 1 \le f \le l, \tag{۶}$$

که در آن $u^\beta_{ij} = \partial^2 u^\beta / \partial x^i \partial x^j$. تبدیلات بی‌نهایت کوچک لی برای معادلهٔ دیفرانسیل فرض‌شده به‌صورت زیر است (Olver & Rosenau, 1987):

$$\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \tilde{u}^\beta = u^\beta + \varepsilon \lambda^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۷}$$

که سیستم معادلات را به $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ تغییر نمی‌دهد و مشتقات مرتبهٔ اول و دوم آن به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{u}^\beta_i = u^\beta_i + \varepsilon \eta^\beta_i, \quad \tilde{u}^\beta_{ij} = u^\beta_{ij} + \varepsilon \eta^\beta_{ij}, \tag{۸}$$

که در آن

$$\eta^\beta_i = \mathcal{D}_i \hat{\lambda}^\beta + \xi^f u^\beta_{fi}, \quad \eta^\beta_{ij} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \hat{\lambda}^\beta + \xi^f u^\beta_{fij}, \tag{۹}$$

و

$$\hat{\lambda}^\beta = \lambda^\beta - \xi^f u^\beta_f, \tag{۱۰}$$

مربوط به تبدیل متعارف لی است که در آن $\tilde{x}^i = x^i$ و $\tilde{u}^\beta = u^\beta + \varepsilon \hat{\lambda}^\beta$. نماد $\mathcal{D}_i$ نشان‌دهندهٔ مشتق کلی عملگر نسبت‌به x^i است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (Bluman et al., 2010):

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u^\beta_i \frac{\partial}{\partial u^\beta} + u^\beta_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\beta_j} + \cdots. \tag{۱۱}$$

برای آنکه تبدیلات (۷) سیستم معادلات دیفرانسیل مفروض را به $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ تغییر ندهد، باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{L}_v \Delta^f \equiv \tilde{v}(\Delta^f) = 0, \quad whenever \quad \Delta^f = 0, 1 \le f \le l, \tag{۱۲}$$

که در آن

$$\tilde{v} = v + \eta^\beta_i \frac{\partial}{\partial u^\beta_i} + \eta^\beta_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\beta_{ij}} + \cdots, \tag{۱۳}$$

[1] Long-Short-Term Memory

امتدادیافتهٔ میدان برداری

$$v=\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}+\sum_{i=1}^{m}\lambda^{\beta}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}, \qquad (۱۴)$$

برای تبدیلات بی‌نهایت کوچک (۷) ا ست. نماد $\mathcal{L}_v\Delta^f$ ن شان‌دهندهٔ م شتق لی Δ^f ن سبت‌به میدان برداری v ا ست. برای حل معادله با تقارن‌های لی باید پارامترهای معادله کاهش داده شـــود. برای این کار، پس از پیدا شـــدن میدان‌های برداری باید ناورداهای[1]آنها حساب شود. برای محاسبهٔ ناوردای میدان برداری (۱۴) باید دستگاه مشخصهٔ زیر حل شود (Dastranj & Hejazi, 2017):

$$\frac{dx^{1}}{\xi^{1}}=\cdots=\frac{dx^{n}}{\xi^{n}}=\frac{du^{1}}{\lambda^{1}}=\cdots=\frac{du^{m}}{\lambda^{m}}. \qquad (۱۵)$$

برخی از میدان‌های برداری جواب مطلوبی برای معادلهٔ دیفرانســـیل پیدا نمی‌کند. به همین دلیل، با شـــار[2]دادن آن میدان برداری و قرار دادن آن در یکی از جواب‌های مطلوب پیداشـده می‌توان جوابی جدید برای معادله پیدا کرد. اگر مولد گروه لی پیدا شود، به‌کمک سری تیلور تابع exp می‌توان گروه تبدیلات جدیدی با شار دادن میدان‌های برداری ساخت که به آن گروه تبدیلات تک‌ـپارامتری می‌گویند. این گروه تبدیلات به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$(\bar{x},\bar{t},\bar{u})=exp(\varepsilon v)(x,t,u), \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$exp(\varepsilon v)(x,t,u)=1+\frac{\epsilon}{1!}v+\frac{\epsilon^{2}}{2!}v^{2}+\cdots, \qquad (۱۷)$$

و (Olver, 1993)

$$v^{2}(x,t,u)=v\big(v(x,t,u)\big). \qquad (۱۸)$$

معادلهٔ بارلزـسونر(1998) با متغیر مستقل x t و متغیر وابستهٔ B تبدیلات بی‌نهایت کوچک زیر را دارد.

$$\tilde{x}=x+\varepsilon\xi^{x}+\mathcal{O}(\varepsilon^{2}), \qquad (۱۹)$$

$$\tilde{t}=t+\varepsilon\xi^{t}+\mathcal{O}(\varepsilon^{2}), \qquad (۲۰)$$

$$\tilde{B}=B+\varepsilon\phi+\mathcal{O}(\varepsilon^{2}), \qquad (۲۱)$$

و

$$\xi^{x}=\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon},\quad \xi^{t}=\frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon},\quad \phi=\frac{d\tilde{B}}{d\varepsilon}. \qquad (۲۲)$$

باتوجه‌به آنکه معادلهٔ دیفرانسـیل (۴) از مرتبهٔ ۲ اسـت، میدان برداری آن نیز تا مرتبهٔ دوم امتداد پیدا می‌کند. میدان برداری امتدادیافتهٔ تبدیلات (۱۹–۲۱) به‌صورت زیر است:

$$v^{(2)}=v+\phi^{x}\frac{\partial}{\partial B_{x}}+\phi^{t}\frac{\partial}{\partial B_{t}}+\phi^{xx}\frac{\partial}{\partial B_{xx}}+\phi^{tt}\frac{\partial}{\partial B_{tt}}+\phi^{xt}\frac{\partial}{\partial B_{xt}}, \qquad (۲۳)$$

[1] Invariant
[2] Flow

که در آن

$$v = \xi^x(x,t,B)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,B)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,B)\frac{\partial}{\partial B}, \quad (۲۴)$$

و

$$\phi^x = \mathcal{D}_x(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t) + \xi^x B_{xx} + \xi^t B_{xt}, \quad (۲۵)$$

$$\phi^t = \mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t) + \xi^x B_{tx} + \xi^t B_{tt}, \quad (۲۶)$$

$$\phi^{xx} = \mathcal{D}_x(\mathcal{D}_x(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xxx} + \xi^t B_{xxt}, \quad (۲۷)$$

$$\phi^{tt} = \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xtt} + \xi^t B_{ttt}, \quad (۲۸)$$

$$\phi^{xt} = \mathcal{D}_x(\mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xxt} + \xi^t B_{xtt}, \quad (۲۹)$$

میدان برداری امتدادیافتهٔ مرتبهٔ دوم معادلهٔ (۴) برابر است با:

$$\xi^x(2a^2x^3\sigma^2 B_{xx}^2 + \sigma^2 x B_{xx} r B_x) - \frac{1}{2}\xi^t e^{r(T-t)} r a^2 x^4 \sigma^2 B_{xx}^2 - \phi r + \phi^x r x + \phi^t + \phi^{xx}\left(e^{r(T-t)}a^2x^4\sigma^2 B_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\right) = 0. \quad (۳۰)$$

که

$$\xi^x = x(c_1 rt + c_3), \quad \xi^t = c_1 t + c_2, \quad (۳۱)$$

$$\phi = \frac{1}{4ra^2}\left[c_1(\sigma^2 - 2r)(rt-1)e^{-r(T-t)} + 2c_1 r \ln(x)\, e^{-r(T-t)} + 4a^2(c_4 e^{rt} + (rZ(c_1 t + c_2) + c_5 x - c_1 B)r)\right]. \quad (۳۲)$$

و c_1، c_2، c_3، c_4 و c_5 ثابت‌های دلخواه هستند. با استفاده از رابطهٔ (۱۲) مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه لی معادلهٔ بارلزسونر (1998) به دست آمده است که برابر است با:

$$v_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad v_2 = e^{rt}\frac{\partial}{\partial B}, \quad v_3 = x\frac{\partial}{\partial B}, \quad v_4 = \frac{\partial}{\partial t} + rB\frac{\partial}{\partial B}, \quad (۳۳)$$

$$v_5 = xrt\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2e^{-r(T-t)}\ln(x) - 2te^{r(t-T)}\left(-\frac{\sigma^2}{2} + r\right) + 4B(rt-1)a^2}{4a^2}\frac{\partial}{\partial B}.$$

برای محاسبهٔ جواب‌های دقیق معادلهٔ قیمت‌گذاری دیفرانسیل بارلزسونر (1998) با گروه‌های لی باید ناورداهای میدان‌های برداری را، که مولد گروه لی این معادله هستند، محاسبه کرد و پس از جای‌گذاری آنها در معادله تعداد پارامترهای آن را کاهش داد. کاهش پارامتر معمولاً معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. اگر پس از کاهش پارامتر معادلهٔ مفروض به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل نشود، بار دیگر فرآیند کاهش پارامتر اعمال می شود. این روند تا جایی تکرار می‌شود که معادلهٔ کاهش‌یافته حل‌شدنی شود.

۱. برای مولد v_1 ناوردای تبدیلات عبارتند از $t = y$ و $B = u(y)$. با جای‌گذاری ناورداها در معادلهٔ (۴) و کاهش پارامترهای آن، معادله به‌صورت یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی کاهش می‌یابد:

$$u' - ru = 0, \quad (۳۴)$$

با حل این معادله و بازگرداندن متغیرهای اصلی، جواب معادله به‌صورت $B = ce^{rt}$ است که در آن c ضریب انتگرال‌گیری است. مابقی مولدهای گروه لی جواب مطلوبی ازطریقِ محاسبهٔ ناورداها ارائه نمی‌دهند. اما با استفاده از گروه‌های یک‌پارامتری (شار) می‌توان جواب جدیدی برای (۴) پیدا کرد.

۲. گروه یک پارامتری برای مولد v_5 به‌صورت $(\bar{x},\bar{t},\bar{B})=\exp(\epsilon v_5)\,(x,t,B)$ است که

$$\bar{x}=xe^{rt\epsilon},\quad \bar{t}=te^{\epsilon}, \tag{۳۵}$$

$$\bar{B}=-\frac{e^{-\epsilon+rte^{\epsilon}}}{2a^2}\Big[\frac{1}{4}\sigma^2te^{-rT}+\ln(x)\,e^{-rT}-\frac{1}{4}\sigma^2te^{-Tr+2\epsilon}-2e^{-rt}a^2B+\frac{1}{2}rte^{-Tr+2\epsilon} \tag{۳۶}$$
$$-\frac{3}{2}rte^{-rT}-e^{-Tr+\epsilon}\ln(xe^{rt\epsilon})+e^{-Tr+\epsilon}rt\Big].$$

با جای‌گذاری در $B=ce^{rt}$، می‌توان نوشت:

$$B(x,t)=\frac{e^{rt-\epsilon}}{a^2}\Big[-\frac{1}{2}e^{-rT}\ln(xe^{-rt\epsilon})+\frac{1}{2}\ln\big(xe^{rt\epsilon(-1+\exp(-\epsilon))}\big)\,e^{-Tr+\epsilon} \tag{۳۷}$$
$$-\frac{1}{4}t\left(-\frac{\sigma^2}{2}+r\right)e^{-Tr+\epsilon}+\frac{3}{4}\left(-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)te^{-Tr-\epsilon}-\frac{1}{2}rte^{-rT}+a^2c\Big].$$

میدان برداری امتدادیافته تا مرتبهٔ دوم معادلهٔ باکستین‌ـهاویسون (2003) برابر است با:

$$\xi^x(\sigma^2xH_{xx}+3\sigma^2x^2\rho H_{xx}^2+rH_x)-r\varsigma+rx\varsigma^x+\varsigma^t+\varsigma^{xx}\left(\frac{1}{2}\sigma^2x^2+2\sigma^2x^3\rho H_{xx}\right)=0. \tag{۳۸}$$

ضرایب میدان برداری فوق با کمک روابط (۲۵–۲۹) برای

$$\xi^x=x(c_1rt+c_3),\quad \xi^t=c_1t+c_2, \tag{۳۹}$$

$$\varsigma=(c_1(rt-1)+c_3)H+\frac{c_4e^{rt}}{r}+\frac{c_1xt(\sigma^2+2r)}{8\rho}+\left(-\frac{c_1\ln(x)}{4\rho}+c_5\right)x, \tag{۴۰}$$

به دست آمده است. به‌طور مشابه، با مدل بارلزـــسونر (1998) مولدهای گروه لی معادله باکستینـــهاویسون(2003)، برابر است با:

$$v_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad v_2=x\frac{\partial}{\partial H},\quad v_3=x\frac{\partial}{\partial x}+H\frac{\partial}{\partial H},\quad v_4=e^{rt}\frac{\partial}{\partial H}, \tag{۴۱}$$

$$v_5=xrt\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{8\rho}[-2x\ln(x)+(2+(\sigma^2+2r)t)x+8\rho H(rt-1)]\frac{\partial}{\partial H}.$$

پس از کاهش پارامترهای معادله (۵) جواب‌های دقیق زیر را به دست آمده است:

۱. از مولد v_3 ناورداهای $t=y$، $x=q$ و $H=v(y)q$ محاسبه شده است. با جای‌گذاری ناورداها،

$$v_y.q=0. \tag{۴۲}$$

با حل این معادله و بازگرداندن متغیرهای اصلی، $H(x,t)=c_1x$.

با شـــار دادن مولدها، مولدهای گروه تک‌پارامتری محاســـبه شـــده اســـت. با این گروه جواب جدیدی برای معادلهٔ باکستین‌ـهاویسون (2003) ارائه شده.

۲. گروه یک‌پارامتری برای مولد v_5، $(\bar{x},\bar{t},\bar{H})=\exp(\epsilon v_5)\,(x,t,H)$، عبارت است از:

$$\bar{x}=xe^{rt\epsilon},\quad \bar{t}=te^{\epsilon}, \tag{۴۳}$$

$$\bar{H} = e^{(r-1)\epsilon}\left[\frac{xrte^{-(rt-1)\epsilon}(-\sigma^2 t - 2rt + 2\ln(xrt) - 2)}{8\rho(rt-1)} - \frac{-xt^2r\sigma^2 - 2xt^2r^2 + 2xrt\ln(xrt) - 8Htr\rho - 2xrt + 8H\rho}{8\rho(rt-1)}\right]. \quad (۴۴)$$

با جای‌گذاری این شار در جواب قبلی، جواب جدید زیر به دست آمده است:

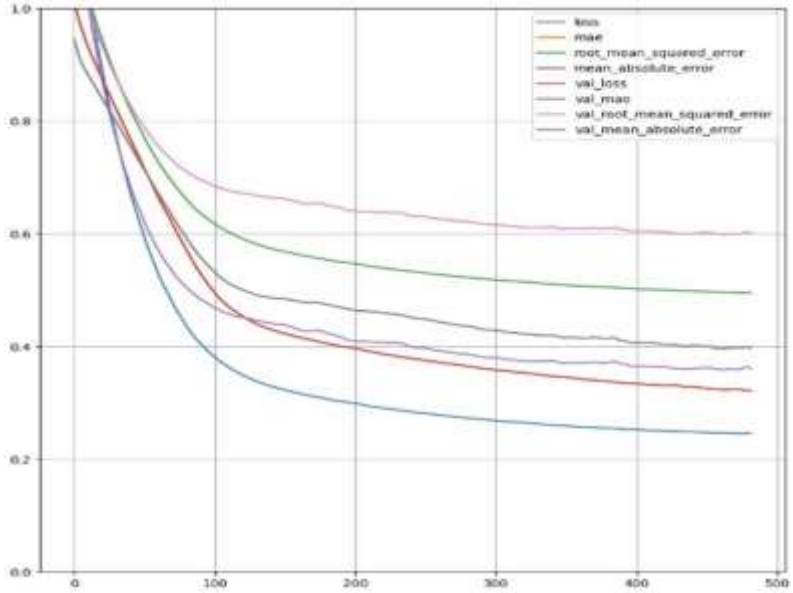
$$H(x,t) = \frac{xe^{(rte^{-\epsilon}-1)\epsilon}}{\rho(rte^{-\epsilon}-1)}\left[\frac{1}{4}\left((-1+\ln(xe^{-rt\epsilon}))e^{-\epsilon(rt\exp(-\epsilon)+rt-1)} - \left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right)te^{-rt\epsilon(\exp(-\epsilon)+1)}\right) + te^{-\epsilon(rt+1)}\left(cr\rho + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r}{4}\right) - e^{-rt\epsilon}\left(c\rho + \frac{\ln(xe^{-rt\epsilon})}{4} - \frac{1}{4}\right)\right]. \quad (۴۵)$$

پس از قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل بارلز—سونر (1998) و باکستین—هاویسون (2003)، با کمک شبکه‌های عصبی بررسی شده است که بازار واقعی به کدام مدل نزدیک‌تر است. برای این کار از شبکهٔ عصبی پرسپترون چندلایه (MLP) و احتمالی (PNN) استفاده شده است. شبکهٔ عصبی پرسپترون برای طبقه‌بندی و پیش‌بینی داده‌ها استفاده می‌شود. در این شبکه خروجی هر لایه ورودی لایهٔ بعد است. این ورودی‌ها در وزن‌های ارتباطی بین گره‌های لایهٔ فعلی و لایهٔ ماقبل آن ضرب و سپس بین گره‌ها تقسیم می‌شود. حاصل‌ضرب ورودی‌ها در وزن‌ها وارد تابع فعال‌ساز شبکه می‌شود. تابع فعال‌ساز داده‌هایی را که در دامنه‌اش قرار ندارد، از فرآیند آموزش حذف می‌کند و مابقی داده‌های شبکه را آموزش می‌دهد. آموزش شبکه به معنای به‌روز شدن وزن‌های مابین لایه‌ها است. در الگوریتم نظارت شده ورودی‌ها با خروجی‌های آنها برای آموزش و به‌روزرسانی وزن‌ها به شبکه ارائه می‌شود. با کمک گرادیان کاهشی تابع خطای خروجی شبکه مینیمم‌سازی و باتوجه‌به وزن‌ها شبکه به‌روزرسانی می‌شود تا خطای شبکه به حداقل برسد (Zhang & Lou, 2021). خروجی‌های لایه‌ها در این شبکه به‌صورت زیر هستند:

$$O_{i+1} = AF\big((W_i \times O_i) + B_{i+1}\big) = \begin{bmatrix} \mathrm{AF}\left(\left(\sum_{a=1}^{n} \mathrm{W_i^{a1}} \times \mathrm{O_i^a}\right) + \mathrm{B_{i+1}}\right) \\ \mathrm{AF}\left(\left(\sum_{a=1}^{n} \mathrm{W_i^{a2}} \times \mathrm{O_i^a}\right) + \mathrm{B_{i+1}}\right) \\ \vdots \\ \mathrm{AF}\left(\left(\sum_{a=1}^{n} \mathrm{W_i^{am}} \times \mathrm{O_i^a}\right) + \mathrm{B_{i+1}}\right) \end{bmatrix}. \quad (۴۶)$$

در این رابطه با فرض آنکه n، تعداد گره‌های لایه i و m، تعداد گره‌های لایهٔ بعدی است، O_i خروجی لایهٔ i، و W_i وزن بین لایهٔ i و لایهٔ ماقبل‌آن است. در این رابطه تابع فعال‌ساز و سوگیری لایهٔ i به‌ترتیب با AF و B_i نمایش داده می‌شود (Popescu et al., 2009). در این پژوهش شبکهٔ پرسپترون چهارلایه با دو لایهٔ پنهان استفاده و تابع فعال‌ساز Elu، که تعمیم‌یافتهٔ تابع Relu است، برای هر دو لایهٔ پنهان به کار گرفته شده است. این دو لایهٔ پنهان به‌ترتیب ۱۰ و ۵ گره دارد. عملکرد یادگیری این شبکه در شکل (۱) نمایش داده شده است. در این شبکه پس از حدود ۴۰۰ تکرار (انجام فرآیند پس‌انتشار)

به‌دلیل ثابت ماندن و کاهش نیافتن خطا فرآیند آموزش شبکه متوقف شده است.



شکل (۱) عملکرد یادگیری شبکهٔ عصبی پرسپترون چندلایه

Figure (1) Learning performance of multilayer Perceptron neural network

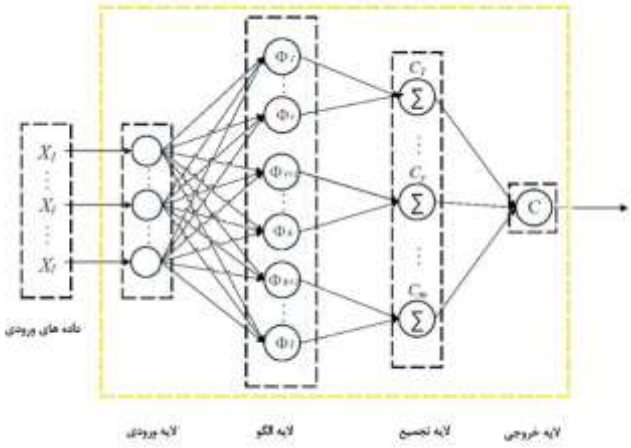
علاوه‌بر شبکهٔ پرسپترون از شبکهٔ عصبی احتمالی نیز استفاده شده است. شبکه‌های عصبی احتمالی برای مسائل مرتبط با دسته‌بندی داده‌ها کاربرد دارند. در مدل استاندارد شبکهٔ عصبی احتمالی شبکه آموزش داده نمی‌شود و این یکی از مزیت‌های شبکهٔ عصبی احتمالی است (Hagan et al., 1997). شبکه‌های عصبی سه لایهٔ اصلیِ ورودی، پنهان و خروجی دارند. در این مدل لایهٔ اول لایهٔ ورودی است که داده‌های جدید را دریافت می‌کند؛ لایهٔ دوم از دو لایهٔ الگو و تجمیع تشکیل می‌شود. خروجی گره x_{ij} از لایهٔ الگو با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_{ij}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-x_{ij})^T(x-x_{ij})}{2\gamma^2}\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\gamma^n}, \quad (۴۷)$$

در این رابطه n ابعاد بردار الگوی x که از لایهٔ ورودی وارد لایهٔ الگو می شود، و γ انحراف‌معیار تابع توزیع نرمال است. در لایهٔ تجمیع به‌کمک رابطهٔ (۴۸) فواصل نمایی محاسبه شده برای هر نمونهٔ i در دستهٔ C_iام باهم جمع و بر تعداد کل آنها تقسیم می‌شود و یک مقدار جدید تحویل می‌دهد. در لایهٔ آخر، تابع انتقال رقابتی حداکثر مقدار احتمال از بردار احتمالی تولیدشده را مشخص می‌کند و دادهٔ ورودی را در آن دسته قرار می‌دهد.

$$p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{N_i}\exp\left(-\frac{(x-x_{ij})^T(x-x_{ij})}{2\gamma^2}\right)}{N_i(2\pi)^{\frac{n}{2}}\gamma^n}. \quad (۴۸)$$

N_i تعداد نمونه‌های آموزشی مربوط به طبقهٔ C_iام است. در شکل (۲) لایه‌های شبکهٔ عصبی احتمالی نمایش داده شده است (Mao et al., 2000; Specht, 1990):



شکل (۲) نمای کلی شبکهٔ عصبی احتمالی (Mao et al., 2000)

Figure (2) Overview of the Probabilistic neural network

نمونهٔ آماری

در این مقاله اختیار معاملهٔ S&P500 به روش گروه‌ها و تقارن‌های لی قیمت‌گذاری شـــده اســـت. قیمت توافقی ۲۰۰۰ دلار و تاریخ انقضا یک ساله از ۱۸ آگوست ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوست ۲۰۲۳ درنظر گرفته شده است. داده‌های آماری شامل اطلاعات شاخص S&P500 و اختیار معامله‌های این شاخص است که به‌ترتیب از investing.com و barchart.com استخراج شده‌اند. این داده‌ها یک دورهٔ ۲۵۱روزه را شامل شده است. برای قیمت‌گذاری از رابطه‌های (۳۷) و (۴۵) استفاده شده است. متغیرهای پژوهش در جدول (۱) به‌شرح زیر هستند:

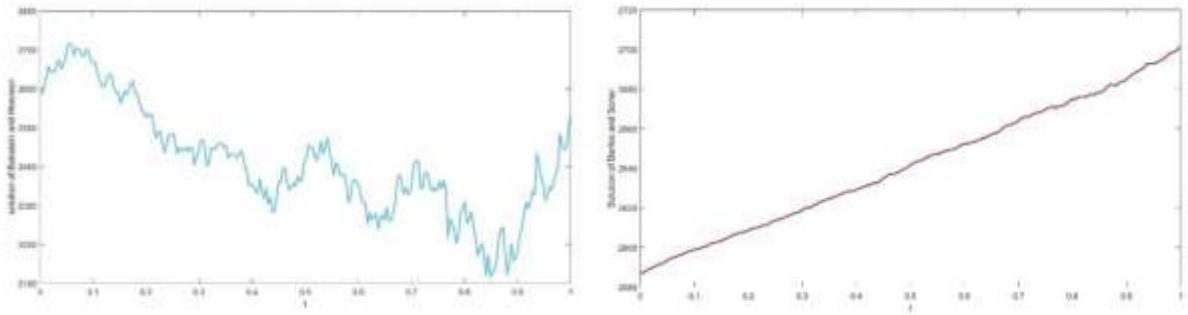
جدول (۱) نحوهٔ محاسبهٔ پارامترهای روابط (۳۷) و (۴۵)

Table (1) How to calculate the parameters of relationships (37) and (45)

پارامتر	نماد پارامتر	مقدار عددی پارامتر(%)	نحوهٔ محاسبهٔ پارامتر
تلاطم بازار	σ	۱/۱۶۹۸۶۳	تلاطم بازار به روش تلاطم تاریخی حساب شده است.
نرخ بهرهٔ بدون ریسک	r	۴/۴۴	نرخ بهرهٔ بدون ریسک، میانگین نرخ بهرهٔ اعلام‌شده توسط فدرال رزرو آمریکا از جولای ۲۰۲۲ تا جولای ۲۰۲۳ فرض شده است.
هزینه‌های معاملاتی	a, ρ	۰/۱	هزینه‌های معاملاتی ۰/۱ دلار به‌ازای هر دلار معامله‌شده درنظر گرفته شده است.

یافته‌ها

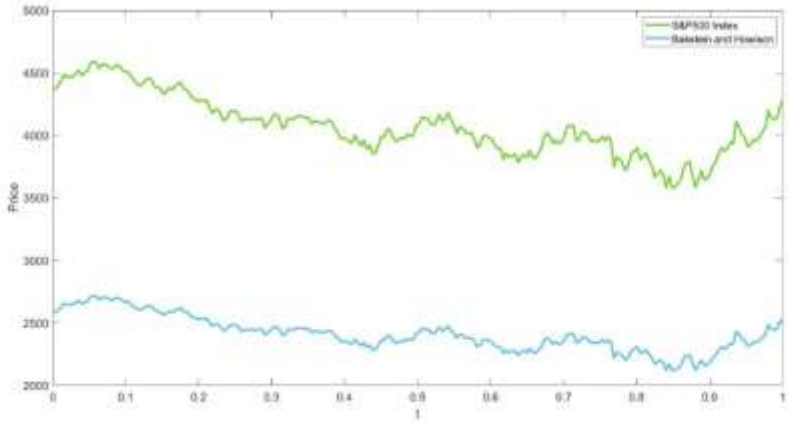
در شکل (۳) نتایج قیمت‌گذاری با رابطه‌های (۳۷) و (۴۵) ارائه شـده اسـت. معادلهٔ (۳۷) با شـار دادن معادلهٔ $B = ce^{rt}$ به دست آمده است. چون $B = ce^{rt}$، جواب مدل بارلز ـسونر (1998) وابستگی بیشتری به زمان دارد و معادلهٔ (۴۵)، که با شار دادن معادله $H(x,t) = c_1 x$ به دست آمده است، وابستگی بیشتری به قیمت دارد که این وابستگی در شکل (۴) به‌وضوح دیده می‌شود.



(آ) بارلز-سونر (ب) باکستین-هاویسون

شکل (۳) قیمت‌گذاری اختیار معامله S&P500 برای $\sigma = 0/0169863$، $r = 0/0444$، $K = 2000$، $T = 1$ و $a = \rho = 0/1$

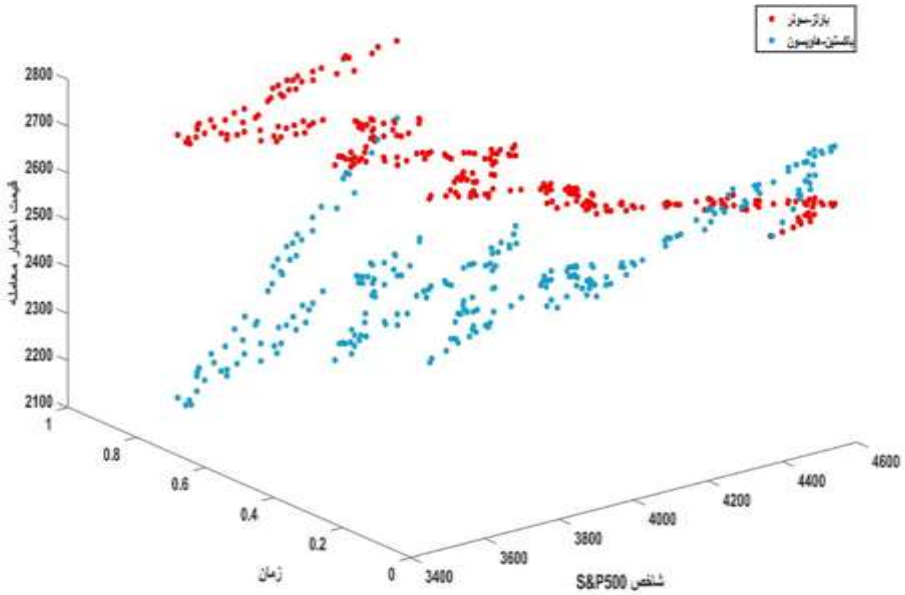
Figure (3) S&P500 option pricing for $\sigma = 0/0169863$, $r = 0/0444$, $K = 2000$, $T = 1$, and $a = \rho = 0/1$



شکل (۴) مقایسهٔ شاخص S&P500 با معادلهٔ (۴۵)

Figure (4) Comparing the S&P500 index with equation (45)

وزن لایه‌های شبکهٔ عصبی با جواب‌های به‌دست‌آمده از دو معادلهٔ پیش‌گفته تعیین شده است. در شکل (۵) داده‌های آموزشی شبکهٔ عصبی آمده است که در دو دسته طبقه‌بندی شده‌اند. داده‌های قرمز جواب‌های معادلهٔ بارلز-سونر (1998) و داده‌های آبی جواب‌های معادلهٔ باکستین-هاویسون (2003) هستند. از این شبکه برای پیش‌بینی مدل بازار استفاده شده است. برای این کار چند داده از ۱۸ آگوست ۲۰۲۳ به بعد انتخاب شده است. در ابتدا این داده‌ها با هر دو مدل بارلز-سونر (1998) و باکستین ـهاویسون (2003) قیمت‌گذاری و سپس شبکهٔ عصبی با این داده‌ها آزموده که نتیجهٔ مقایسهٔ آن در جدول (۲) ارائه شده است.



شکل (۵) طبقه‌بندی داده های آموزشی

Figure (5) Classification of training data

جدول (۲) پیش‌بینی مدل بازار با مقایسهٔ قیمت‌گذاری جبرلی، شبکهٔ عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه

Table (2) Market model prediction by comparing Lie algebra pricing, Probabilistic neural network, and multilayer Perceptron

x	t	قیمت بازار	بارلز-سونر	خطا	باکستین-هاویسون	خطا	جبرلی	PNN	MLP
۴۴۶۷/۷۱	۰/۰۸۷۶۴۹	۲۴۸۸/۰۹	۲۵۹۷/۲۶	۱۰۹/۱۷	۲۶۴۴/۶۹	۱۵۶/۶۰	0	0	0
۴۴۰۴/۳۳	۰/۰۸۷۳۰۲	۲۴۴۶/۵۷	۲۵۹۶/۷۹	۱۵۰/۲۲	۲۶۰۷/۱۷	۱۶۰/۶۰	0	0	0
۴۵۱۸/۴۴	۰/۱۳۴۳۸۷	۲۵۱۱/۸۳	۲۶۰۲/۹۱	۹۱/۰۸	۲۶۷۴/۷۲	۱۶۲/۸۹	0	0	0
۴۳۹۹/۷۷	۰/۱۱۴۱۷۳	۲۳۷۹/۸۷	۲۵۹۹/۸۰	۲۱۹/۹۳	۲۶۰۴/۴۷	۲۲۴/۶۰	0	0	۱
۴۴۰۵/۷۱	۰/۱۸۶۵۰۸	۲۴۰۵	۲۶۰۸/۰۶	۲۰۳/۰۶	۲۶۰۷/۹۹	۲۰۲/۹۹	۱	0	۱

در جدول (۲)، x شاخص S&P500 و t زمان باقی مانده تا سررسید اختیار معامله است. با استفاده از معادلهٔ (۳۷) و برای مقادیر x و t ارائه‌شده در جدول (۲)، تحت مدل بارلز-سونر (1998) قیمت‌گذاری انجام شده که نتیجهٔ آن در ستون مربوط به بارلز-سونر (1998) ارائه شده است. در ستون مربوط به باکستین-هاویسون جواب‌های قیمت‌گذاری تحت مدل باکستین-هاویسون (2003) شرح داده شده است. درنهایت، اختلاف جواب‌ها تحت دو مدل مذکور با قیمت‌های واقعی بازار مقایسه شده‌اند و نتایج آن در ستون مربوط به جبرلی ارائه شده‌اند. زمانی‌که قیمت بارلز-سونر (1998) به قیمت بازار نزدیک‌تر است، در ستون جبرلی صفر و درصورتِ نزدیک بودن قیمت باکستین-هاویسون (2003) به آن، عدد یک قرار داده شده است. در ستون‌های PNN و MLP به‌ترتیب نتایج شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه ذکر شده‌اند. در این دو ستون عدد یک در جدول نشان‌گر این است که داده در دستهٔ باکستین-هاویسون (2003) قرار دارد و عدد صفر برای نشان دادن تعلق داده به دستهٔ بارلز-سونر (1998) به کار گرفته شده است.

نتیجه‌گیری

ابتدا به‌کمک گروه‌ها و تقارن‌های لی، تحت دو مدل غیرخطی بارلز ـسونر (1998) و باکستین ـهاویسون (2003) قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ اروپایی انجام شـده اسـت. بعد از قیمت‌گذاری شـاخص S&P500 در بازهٔ ۱۸ آگوسـت ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوسـت ۲۰۲۳، شـبکهٔ عصـبی احتمالی و پرسـپترون چندلایه آموزش داده و داده‌ها در دو کلاس بارلزسـونر (1998) و باکستین‌ـهاویسون(2003) دسته‌بندی شده‌اند. سپس برای یافتن نزدیک‌ترین مدل به بازار واقعی، شبکه با ۵ داده آزموده شده اسـت. علاوه‌براین، جواب‌های به‌دسـت‌آمده از جبرلی با داده‌های آزمون قیمت‌گذاری و اختلاف‌های آنها از داده‌های واقعی محاسبه شده است تا مشخص شود که داده‌های واقعی به کدام جواب نزدیک‌تر هستند. شبکهٔ عصبی پرسپترون ۳ داده از ۵ داده را متعلق به مدل بارلزـسونر (1998) دانست و شبکهٔ عصبی احتمالی تمامی ۵ داده را در دستهٔ بارلزـسونر (1998) قرار داد. در محاسبهٔ اختلاف جواب‌های گروه‌های لی با قیمت واقعی بازار، ۴ داده از ۵ داده به مدل بارلزـسونر (1998) نزدیک‌تر بودند. بنابراین، طبق نتایج به‌دست‌آمده، بازار اختیار معاملهٔ S&P500 با سررسید یک ساله و قیمت توافقی ۲۰۰۰ دلار به مدل بارلزـسونر (1998) نزدیک‌تر بوده است.

منابع

تهرانی، رضا، میرلوحی، سیدمجتبی، و گل‌کانی، محمدرضا (۱۳۹۹). محاسبهٔ ارزش اختیارهای واقعی با رویکردهای متفاوت در بورس اوراق بهادار تهران. *مدیریت دارایی و تامین مالی*، ۸(۲)، ۱-۱۲.

https://doi.org/10.22108/amf.2019.115211.1372

دسترنج، الهام، صاحبی‌فرد، حسین، عبدالباقی، عبدالمجید، و لطیفی، رقیه (۱۳۹۹). مقایسهٔ قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ سقف و توانی در جلوگیری از فضای آربیتراژی: شواهدی از شرایط مبتنی‌بر نوسانات تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی. *مدیریت دارایی و تامین مالی*، ۸(۲)، ۸۹-۱۰۳.

https://doi.org/10.22108/amf.2020.119750.1479

References

Ankudinova, J., & Ehrhardt, M. (2008). On the numerical solution of nonlinear Black–Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3), 799-812. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.005

Bakstein, D., & Howison, S. (2003). A non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives. Working Paper, *Oxford center for industrial and applied mathematics*, Oxford, 1-52.

Barles, G., & Soner, H. M. (1998). Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance and Stochastics*, *2*, 369-397. https://doi.org/10.1007/s007800050046

Bhandari, H. N., Rimal, B., Pokhrel, N. R., Rimal, R., Dahal, K. R., & Khatri, R. K. (2022). Predicting stock market index using LSTM. *Machine Learning with Applications*, *9*, 100320. https://doi.org/10.1016/j.mlwa.2022.100320

Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

Bluman, G. W., Cheviakov, A. F., & Anco S. C. (2010). Applications of symmetry methods to partial differential equations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6

Che, Y., Zheng, Y., Wu, Y., Sui, X., Bharadwaj, P., Stroe, D. I., Yang, Y., Hu, X., & Teodorescu, R. (2022). Data efficient health prognostic for batteries based on sequential information-driven probabilistic neural network. *Applied Energy*, *323*, 119663. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119663

Cuthbertson, K., & Nitzsche, D. (2001). *Financial Engineering: Derivatives and Risk Management*. John Wiley & Sons.

Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2017). New solutions for Fokker-Plank equation of special stochastic process via

Lie point symmetries. *Computational Methods for Differential Equations*, *5*(1), 30-42.

Dastranj, E., SahebiFard, H., Abdolbaghi, A., & Latifi, R. (2020). A comparison between the pricing of capped and power options on the basis of arbitrage prevention: Evidence from a stochastic market with double Stochastic volatility, double jump, and a stochastic intensity measure. *Journal of Asset Management and Financing*, *8*(2), 89-103. https://doi.org/10.22108/amf.2020.119750.1479 [In Persian].

Davis, M. H., Panas, V. G., & Zariphopoulou, T. (1993). European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2), 470-493. https://doi.org/10.1137/0331022

Fleming, W. H., & Soner, H. M. (1993). *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer.

Habibi, N., Lashkarian, E., Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2019). Lie symmetry analysis, conservation laws and numerical approximations of time-fractional Fokker–Planck equations for special stochastic process in foreign exchange markets. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 513, 750-766. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.155

Hagan, M. T., Demuth, H. B., & Beale, M. (1997). *Neural Network Design*. PWS Publishing Co.

Hodges, S. (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *The Review of Futures Markets*, *8*, 222-239.

Hull, J. C., Treepongkaruna, S., Heaney, R., Pitt, D., & Colwell, D. (2017). *Fundamentals of Futures and Options Markets*. Pearson.

Mao, K. Z., Tan, K. C., & Ser, W. (2000). Probabilistic neural-network structure determination for pattern classification. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11(4), 1009-1016. https://doi.org/10.1109/72.857781

Mehrdoust, F., Noorani, I., & Fallah, S. (2022). Markov regime-switching Heston model with CIR model framework and pricing VIX and S&P500 American put options. *Mathematical Reports*, 24(74), 781-806.

Naderifard, A., Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2018). Exact solutions for time-fractional Fokker–Planck–Kolmogorov equation of Geometric Brownian motion via Lie point symmetries. *International Journal of Financial Engineering*, 5(02), 1850009. https://doi.org/10.1142/S2424786318500093

Olver, P. J., & Rosenau, P. (1987). Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(2), 263-278. https://doi.org/10.1137/0147018

Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer Science & Business Media.

Popescu, M. C., Balas, V. E., Perescu-Popescu, L., & Mastorakis, N. (2009). Multilayer perceptron and neural networks. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 8(7), 579-588.

Samimia, O., & Mehrdoust, F. (2022). Vasicek interest rate model under Lévy process and pricing bond option. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 53(1), 529-545 1-17. https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2025837

Specht, D. F. (1990).Probabilistic neural networks. *Neural Networks*, 3(1), 109-118. https://doi.org/10.1016/0893-6080(90)90049-Q

TalatianAzad, S., Ahmadi, G., & Rezaeipanah, A. (2022). An intelligent ensemble classification method based on multi-layer perceptron neural network and evolutionary algorithms for breast cancer diagnosis. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 34(6), 949-969. https://doi.org/10.1080/0952813X.2021.1938698

Tan, Q., Mu, X., Fu, M., Yuan, H., Sun, J., Liang, G., & Sun, L. (2022). A new sensor fault diagnosis method for gas leakage monitoring based on the naive Bayes and probabilistic neural network classifier. *Measurement*, 194, 111037. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111037

Tehrani, R., Mirlohi, S. M., & Golkani, M. R. (2020). Calculating real option value under different approaches in the Tehran Stock Exchange. *Journal of Asset Management and Financing*, 8(2), 1-12. https://doi.org/10.22108/AMF.2019.115211.1372 [In Persian].

Zhang, D., & Lou, S. (2021). The application research of neural network and BP algorithm in stock price pattern classification and prediction. *Future Generation Computer Systems*, 115, 872-879. https://doi.org/10.1016/j.future.2020.10.009