



A Comparison between the Pricing of Capped and Power Options on the Basis of Arbitrage Prevention: Evidence from a Stochastic Market with Double Stochastic Volatility, Double Jump, and a Stochastic Intensity Measure

Elham Dastranj^{1*}, Hosein Sahebi Fard², Abdolmajid Abdolbaghi³, Roghaye Latifi⁴

1- Assistant Professor, Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

elham.dastranj@shahroodut.ac.ir

2- Ph.D. Student, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

sahebi.hosein@shahroodut.ac.ir

3- Assistant Professor, Department of Management, Faculty of Industrial Engineering & Management, Shahrood University of

Technology, Shahrood, Iran

abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

4- M.Sc., Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

roghayelatifi09@yahoo.com

Abstract

Objective: In this paper, three types of power options under special stochastic markets have been priced. In the considered market, a risky underlying asset follows a model with two stochastic volatilities, two jumps, and a stochastic intensity measure. Generally, a power option is supposed to generate more income and benefit than other options. There exist, nevertheless, some methods thwarting the opportunities and one of these methods is considering a barrier such as a cap for power option income. The aim of this study is to draw a comparison between the ability of capped and power options in generating arbitrage opportunities.

Method: In this study capped and power options are compared in order to find probable arbitrage opportunities under the considered market. For this purpose, comparisons are made on the basis of a hypothetical condition, applying the Tehran Stock Exchange index as an underlying asset. Then, the profits of these two options extracted from the data of the Tehran Stock Exchange have been compared.

Results: Our findings indicate that between the capped and power options, the former has a higher ability to handicap the profit of arbitrage opportunities.

Keywords: Power option, Capped option, Fast fourier transform, Stochastic volatility, Stochastic intensity

مقایسه قیمت گذاری اختیار معامله سقف و توانی در جلوگیری از فضای آربیتراژی: شواهدی از شرایط مبتنی بر

نوسانات تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی

الهام دسترنج^{۱*}، حسین صاحبی فرد^۲، عبدالمجید عبدالباقی^۳، رقیه لطیفی^۴

۱- استادیار گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

elham.dastranj@shahroodut.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

sahebi.hosein@shahroodut.ac.ir

۳- استادیار، گروه مدیریت، دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

۴- کارشناسی ارشد ریاضی مالی، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

roghayelatifi09@yahoo.com

چکیده

اهداف: در این مقاله سه نوع اختیار معامله توانی مبتنی بر بازارهای تصادفی قیمت گذاری شده‌اند که در آنها قیمت دارایی پایه ریسکی از مدلی با دو تلاطم تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی پیروی می‌کند. اختیار معامله توانی در مقایسه با سایر اختیار معامله‌ها نرخ بازده بیشتری دارد و این بازده، ممکن است فرصت آربیتراژ در بازار ایجاد کند؛ ولی به شیوه‌های مختلفی از ایجاد این فرصت در بازار پیشگیری می‌شود. از جمله این راهها به کارگیری سقفی برای بازده اختیار معامله توانی است که در این مطالعه با به کارگیری این شیوه بر کنترل سود اختیار معامله توانی سعی شده است. هدف پژوهش حاضر، مقایسه بین اختیار توان استاندارد و اختیار سقف، برای بررسی ایجاد فرصت آربیتراژ در بازاری مبتنی بر مدل پیشنهادی است.

روش: ابتدا مقایسه با شرایطی فرضی انجام شده است؛ سپس از شاخص کل در جایگاه دارایی پایه و از اطلاعات دهساله شاخص بورس (از سال ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۷) استفاده و سود این دو نوع اختیار در بورس اوراق بهادار، مقایسه شده است.

نتایج: نتایج مقایسه سود اختیار توانی استاندارد و سقف در بورس اوراق بهادار، نشان می‌دهد اختیار سقف، توانایی کنترل سود و جلوگیری از ایجاد فضای آربیتراژی را دارد.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله توانی، اختیار معامله سقف، تبدیل فوریه سریع، تلاطم تصادفی، اندازه شدت تصادفی

* نویسنده مسؤول

مقدمه

مدل پیشنهادی در این پژوهش که در حقیقت ترکیبی از پرش‌های پواسن، نمایی، دو فرایند تلاطم تصادفی و اندازه شدت تصادفی است، نسبت به مدل هستون (۱۹۹۳) و مدل‌های دیگر، آشفتگی فرایند قیمت در بازار را بیشتر و بهتر تشریح می‌کند؛ بنابراین به دلیل نزدیک بودن به بازار واقعی کارآمدتر است.

اختیار معامله توانی که در آن بازده، به قیمت دارایی پایه با توانی مشخص وابسته است، برای یک سرمایه‌گذار تیزبین، به دلیل داشتن بازده بالاتر به‌ویژه در بازارهایی که تلاطم بالایی دارند، توانمندتر از اختیار معامله‌های دیگر عمل می‌کند (کیم، کیم، مون و وی، ۲۰۱۲). این بازده بالا سبب می‌شود سرمایه‌گذاران به دلیل سود بیشتر به این نوع اختیار روی آورند؛ در نتیجه به نوع دیگری از اختیار توانی، به نام اختیار سقف^۶، با اعمال سقفی برای سود، توجه می‌شود.

در این مقاله ابتدا سه نوع اختیار توانی و تابع قیمت گذاری مربوط معرفی شده است؛ سپس مدل مدنظر که از ترکیب هستون مضاعف، دو پرش و اندازه شدت تصادفی است، معرفی و تابع مشخصه آن مطرح می‌شود. در انتها قیمت گذاری دو نوع اختیار توانی مبتنی بر مدل معرفی شده، در شرایط فرضی و واقعی بازار انجام گرفته و با مشخص کردن سود و زیان هر کدام، شرایط ایجاد فرصت سودجویی بررسی شده است.

مبانی نظری

اختیار معامله توانی، یکی از انواع اختیارهای نامتعارف است که بازده آن به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ وابسته است. از اختیار توانی در بازارهای دارای تلاطم بالا مانند بازار طلا، استفاده بیشتری می‌شود (دسترنج، صاحبی فرد، عبدالباقی و حجازی، ۲۰۱۹). این نوع اختیار دارای حالت‌های مختلفی است که در این مقاله سه نوع از آن بررسی شده است.

با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T ،

ارزش گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در مالی است. بی‌شک مدل بلک - شولز^۱ (۱۹۷۳) انقلابی در شیوه قیمت گذاری اختیار معامله به وجود آورد؛ اما این مدل دارای نقص‌هایی نیز بود که مهم‌ترین آنها ثابت انگاشته شدن نرخ تلاطم در این مدل بود و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت‌های اختیار مبادله شده در بازار گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند.

بعد از بلک - شولز کارشناسان بسیاری برای رهایی از این نقص، مدل‌هایی برای پویایی‌های تلاطم ارائه کردند. از مؤثرترین مدل‌ها، پس از مدل بلک - شولز، مدل هستون^۲ (۱۹۹۳) بود که آن نیز به دلیل در نظر نگرفتن اتفاقات نادر در بازار، یعنی اتفاقاتی از قبیل بحران‌های مالی یا رسیدن اطلاعات جدید تأثیرگذار به بازار، نیاز به بازنگری جدی داشت. از آن پس مطالعات گسترده‌ای انجام و مدل‌های بسیار دیگری ارائه شد که از آن بین، مدل بیتس^۳ (۱۹۹۶) به مدل واقعی بازار نزدیک‌تر و به تبع آن کارآمدتر به نظر می‌رسید. بیتس (۱۹۹۶) برای به دست آوردن مدل‌های واقعی‌تر، اضافه کردن پرش به مدل را پیشنهاد کرد. پس از آن مرتون^۴ (۱۹۷۶) برای توزیع اندازه پرش، فرایند پرش - انتشار را پیشنهاد کرد که در آن لگاریتم اندازه پرش به‌طور نرمال توزیع شده بود. هر چند مدل مرتون برای ارزش گذاری قیمت، به واقعیت بازار نزدیک‌تر بود؛ ولی باز هم تمام واقعیت توزیع نرخ بازده را نشان نمی‌داد. برای رفع این مشکل کو^۵ (۲۰۰۲) فرایند پرش - انتشار دیگری را معرفی کرد که در آن اندازه پرش از توزیع نمایی مضاعف پیروی می‌کرد و دیگر مشکل روش مرتون را نداشت؛ زیرا توزیع نمایی مضاعف دم سنگین تری دارد و داده‌های پرت بیشتری را می‌پذیرد.

1. Black-Scholes
2. Heston
3. Bates
4. Merton
5. Kou

6. Capped option

دیگری از اختیار توانی با نام اختیار توانی چهار گانه را تحت اندازه ریسک خنثی اثبات کردند. دسترنج و همکاران (۲۰۱۹) با قیمت گذاری اختیار توانی و محاسبه سود یا زیان ناشی از این اختیار، ایجاد فضای آربیتراژ در بازار طلا را بررسی کردند و نشان دادند که در بازارهایی با تلاطم بالا، اختیار توانی، فرصت سودجویی ایجاد می کند.

با قرارداد $X_t = \ln S_t$ و $K = \ln K$ رابطه زیر به دست می آید که در آنها $q_T(X_t)$ تابع چگالی فرایند تصادفی X_t است:

$$c(T, k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_t} - e^{mk}) q_T(X_T) dX_T \quad (۴)$$

$$c(T, k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_t} - e^k) q_T(X_T) dX_T \quad (۵)$$

کار و مادان^۵ (۱۹۹۹) تابع قیمت اختیار خرید را به صورت زیر اصلاح کردند:

$$C(T, K) = e^{\alpha k} c(T, k), \quad \alpha > 0$$

گیل پلازا^۶ در سال ۱۹۵۱ با معرفی قضیه ای، حالتی دیگر از معکوس تبدیل فوریه را مطرح کرد و کار و مادان (۱۹۹۹) با استفاده از معکوس تبدیل فوریه، با روشی جدید به نام تبدیل فوریه سریع^۷، اختیار معاملات اروپایی تحت مدل هستون را قیمت گذاری کردند. روش آنها به دلیل سرعت و دقت بالا، به سرعت به یکی از راهکارهای محبوب و مفید برای قیمت گذاری مشتقات تبدیل شد. روش تبدیل فوریه سریع نیازمند مشخص کردن تابع مشخصه مدل های قیمت گذاری است که توابع اکثر مدل ها در دسترس است.

تبدیل فوریه روی $C(T, K)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} C(T, K) dk \quad (۷)$$

ارزش گذاری نوع اول اختیار خرید معامله توانی خنثی به شکل زیر است و با نام اختیار توانی استاندارد شناخته می شود:

$$\max\{S_t^m - K^m, 0\}$$

برای ارزش گذاری نوع دوم اختیار خرید توانی نوشته می شود:

$$\max\{S_t^m - K, 0\}$$

لیو و چن^۱ (۲۰۱۲) با استفاده از تقریب تیلور^۲، فرمولی ضمنی برای اختیار توانی نوع اول و دوم به دست آوردند. ابراهیم، اهارا و مهدزاکي^۳ (۲۰۱۶) ضمن استخراج فرمول قیمت گذاری اختیار توانی تحت مدل پرش - انتشار، قیمت این اختیار در مدل بلک - شولز و مدل پرش انتشار را مقایسه کرده اند و خاصیت اهرمی اختیار توانی را نشان داده اند.

نوع دیگری از اختیار توانی به نام سقف، اختیاری است که در آن سقف سود L در قرارداد مشخص می شود و ارزش گذاری آن به صورت زیر است:

$$\min\{\max\{S_t^m - K^m, 0\}, L\}$$

ارزش گذاری انواع اختیار خرید توانی تحت اندازه ریسک عبارتند از:

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S_T^m - K^m)^+ | F_t], \quad (۱)$$

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)} E^Q [S_T^m - K^m | F_t], \quad (۲)$$

$$c(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q [\min\{(S_t^m - K^m)^+, L\} | F_t], \quad (۳)$$

r نرخ بهره (ثابت) و:

$$(S_t^m - K^m)^+ = \max\{S_t^m - K^m, 0\}$$

رابطه (۱) برای ارزش گذاری اختیار خرید معامله توانی استاندارد، رابطه (۲) برای ارزش گذاری نوع دوم اختیار خرید معامله توانی و رابطه (۳) برای ارزش گذاری اختیار سقف استفاده می شوند.

لی، یو و لی^۴ (۲۰۱۷) فرمول قیمت گذاری انواع

5. Carr and Madan
6. Gil-Pelaez
7. Fast Fourier Transform

1. Liu & Chen
2. Taylor approximation
3. Ibrahim, O'Hara & Mohd Zaki
4. Lee, Yoo & Lee

روش پژوهش

برای استفاده از روش تبدیل فوریه سریع، لازم است ابتدا تابع $\psi_T(u)$ مربوط به اختیار و تابع مشخصه مدل تحت بررسی معین شود.

نخست، با جای گذاری رابطه (۴) در (۶) و رابطه (۶) در (۷) برای نوع اول اختیار معامله توانی داریم:

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^{m^k}) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{mX_T + \alpha k} - e^{(\alpha+m)k}) e^{iuk} dk dX_T \\ &= \frac{me^{-rT} H_{S_T}(u - (\alpha + m)i)}{(\alpha + iu)(1 + \alpha + iu)}. \end{aligned} \quad (11)$$

به این ترتیب رابطه زیر برای نوع دوم اختیار معامله توانی با جای گذاری رابطه (۵) در (۶) و رابطه (۶) در (۷) به دست می آید:

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{mX_T + \alpha k} - e^{(\alpha+1)k}) e^{iuk} dk dX_T \\ &= e^{-rT} \left[\frac{H_{S_T}(u - (\alpha + m)i)}{(\alpha + iu)} - \frac{H_{S_T}(u - (\alpha + 1)i)}{(1 + \alpha + iu)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

برای اختیار خرید سقف داریم:

$$\begin{aligned} c_{cap}(T, S_T) &= e^{-rT} E^Q[\min\{(S_T^m - K^m)^+, L\} | F_T] \\ &= e^{-rT} E^Q[\max\{S_T^m - K^m, 0\} | F_T] \\ &\quad - e^{-rT} E^Q[\max\{S_T^m - M^m, 0\} | F_T] \\ &= c_m(T, S_T, K) - c_m(T, S_T, M) \end{aligned} \quad (13)$$

که c_m ارزش اختیار توانی نوع اول و $M = (K^m + L)^{\frac{1}{m}}$ است.

در روابط فوق $H_{S_T}(u)$ تابع مشخصه X_t تحت اندازه ریسک خنثی است.

مدل مدنظر در این پژوهش، از افزودن دو فرایند پرش و اندازه شدت تصادفی، به مدل هستون مضاعف

معکوس تبدیل فوریه تابع $C(T, k)$ نیز به صورت زیر است:

$$C(T, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du \quad (8)$$

با توجه به رابطه (۶) نوشته می شود:

$$c(T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du \quad (9)$$

بنابراین، قیمت اصلاح شده اختیار خرید توانی برای هر دو نوع، با استفاده از تبدیل فوریه سریع به شکل زیر است که در آن پارامتر Δ به N وابسته و مقدار N توانی از دو است:

$$\begin{aligned} c(T, k) &= \frac{e^{-\alpha k v}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(v-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) \frac{\Delta}{3} (3) \\ &\quad + (-1)^j - \delta_{j-1} \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین، رابطه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} u_j &= \Delta(j-1), b = \frac{N\Delta}{2}, k_v = -b + \Delta(v-1), v \\ &= 1, 2, \dots, N, \delta_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \end{aligned}$$

گنزالزا (۲۰۱۴) قیمت گذاری اختیار اروپایی را تحت چند مدل مختلف از انواع مدل هستون، با استفاده از تبدیل فوریه سریع، تبدیل فوریه سریع کسری و روش مونت کارلو ۲ مشخص و دقت و سرعت روشها را با هم مقایسه کرده است. مهردوست و صابر (۲۰۱۴)، اختیار معامله را طبق مدل هستون مضاعف با پرش با استفاده از تبدیل فوریه سریع، قیمت گذاری و با روش انتگرال گیری گاوس - لژاندر ۳، دقت این روش را مشخص کردند. دسترنج و لطیفی (۲۰۱۷) نیز با استفاده از تبدیل فوریه، قیمت گذاری اختیار معامله را تحت مدل هستون مضاعف با دو پرش انجام و با روش شبیه سازی مونت کارلو، دقت این روش را نشان داده اند.

1. González
2. Monte Carlo
3. Gauss-Legendre

قضیه: تابع مشخصه مدل معرفی شده تحت اندازه ریسک خنثی به صورت زیر است:

$$H_{\log(S_T)}(u) = \exp\{iu(\log(S_0) + rT) + C_1(u, T)\theta_1 + D_1(u, T)V_0^{(1)} + C_2(u, T)\theta_2 + D_2(u, T)V_0^{(2)} + B_T^{(1)}(u)\lambda_0 + B_T^{(2)}(u)\} \quad (18)$$

که

$$C_1(u, T) = \kappa_1[r_{neg}^{(1)}T - \frac{2}{\sigma_{v_1}} \log\left(\frac{1 - g_1 e^{-d_1 T}}{1 - g_1}\right)]$$

$$D_1(u, T) = r_{neg}^{(1)} \left[\frac{1 - e^{-d_1 T}}{1 - g_1 e^{-d_1 T}} \right]$$

$$C_2(u, T) = \kappa_2[r_{neg}^{(2)}T - \frac{2}{\sigma_{v_2}} \log\left(\frac{1 - g_2 e^{-d_2 T}}{1 - g_2}\right)]$$

$$D_2(u, T) = r_{neg}^{(2)} \left[\frac{1 - e^{-d_2 T}}{1 - g_2 e^{-d_2 T}} \right]$$

$$B_T^{(1)}(u) = \frac{2p(u)(1 - e^{\eta_1 T})}{\eta_2}$$

$$B_T^{(2)}(u) = \frac{2\kappa_3\theta_3}{\sigma_\lambda} \log\left[\frac{2\eta_1}{\eta_2} \exp\left(\frac{1}{2}(\kappa_3 - \eta_1)T\right)\right]$$

و در روابط فوق برای $j = 1, 2$:

$$\alpha = \frac{(-u^2 - iu)}{2}, \beta_j = \kappa_j - \rho_j \sigma_{v_j} iu, \gamma_j = \frac{\sigma_{v_j}^2}{2}$$

$$d_j = \sqrt{\beta_j^2 - 4\alpha\gamma_j}, r_{neg}^{(j)} = \frac{\beta_j \pm d_j}{2\gamma_j}, g_j = \frac{r_{neg}^{(j)}}{r_{pos}^{(j)}}, c_j = 1 - iu\rho_j\mu_{v_j}$$

$$v_i = \frac{\beta_j + d_j}{(\beta_j + d_j)c_j - 2\mu_{v_j}\alpha} + \frac{4\mu_{v_j}\alpha}{(d_j c_j)^2 - (2\mu_{v_j}\alpha - \beta_j - c_j)^2} \times \log\left[1 - \frac{(d_j - \beta_j)c_j + 2\mu_{v_j}\alpha}{d_j c_j} (1 - e^{-d_j})\right],$$

$$p(u) = -(1 + iu\mu_j) + \exp\left(iu\mu_s + \frac{\sigma_s^2(iu)^2}{2}\right) \times \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

به دست می آید. فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال، $\{F_t\}_t$ فیلتر تولید شده توسط فرایند براونی و فرایند پرش در زمان t ، $0 \leq t \leq T$ و Q اندازه احتمال ریسک خنثی باشد؛ همچنین فرض کنید فرایند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه t از مدل زیر تبعیت کند:

$$dS_t = (r - \lambda_t \mu_j) S_t dt + \sqrt{V_t^{(1)}} S_t dW_t^{(1)} + \sqrt{V_t^{(2)}} S_t dW_t^{(3)} + JS_t dN_t \quad (14)$$

$$dV_t^{(1)} = \kappa_1(\theta_1 - V_t^{(1)})dt + \sigma_{v_1} \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(2)} + Z_1 N_t, \quad (15)$$

$$dV_t^{(2)} = \kappa_2(\theta_2 - V_t^{(2)})dt + \sigma_{v_2} \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(4)} + Z_2 N_t, \quad (16)$$

$$d\lambda_t = \kappa_3(\theta_3 - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_t^{(5)}, \quad (17)$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، پارامترهای θ_1 و θ_2 میانگین بلندمدت تلاطم، κ_1 و κ_2 سرعت بازگشت به میانگین تلاطم، σ_{v_1} و σ_{v_2} واریانس های فرایندهای تلاطم، N_t فرایند پواسن ناهمگن با فرایند اندازه شدت λ_t است؛ κ_3 سرعت بازگشت به میانگین فرایند اندازه شدت، θ_3 میانگین بلندمدت فرایند اندازه شدت، σ_λ واریانس فرایند اندازه شدت، Z_1 و Z_2 فرایندهای تصادفی نمایی با پارامترهای μ_{v_1} و μ_{v_2} و Z_i $(i = 1, 2)$ دارای توزیع لگ-نرمال با میانگین $\mu_s + \rho_j Z_i$ و واریانس σ_s^2 که در آن

$$\mu_j = \frac{\exp(\mu_s + \frac{\sigma_s^2}{2})}{1 - \rho_j(\mu_{v_1} + \mu_{v_2})} - 1.$$

$W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)}$ و $W_t^{(4)}$ فرایندهای براونی تحت Q به ترتیب با ضریب همبستگی های ρ_1 و ρ_2 هستند که مقادیری ثابتند و فرایند براونی مستقل $W_t^{(5)}$ از فرایندهای براونی فوق است. در ادامه با استفاده از دافی ۱، پن ۲ و سینگلتون ۳، گاترال ۴ (۲۰۱۱) و زوه (۲۰۰۹) تابع مشخصه تعیین خواهد شد.

1. Duffi
2. Pan
3. Singleton
4. Gatheral

با جای گذاری معادلات (۵) و (۶) در رابطه فوق

داریم:

$$\begin{aligned}
 H_{\log(S_T)}(u) &= E^Q[\exp(iu \log(S_T))] \\
 &= E^Q \exp(iu \log(S_0)) + rT \\
 &\quad - \mu_J \int_0^T \lambda_t dt - \frac{1}{2} \int_0^T V_t^{(1)} dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T V_t^{(2)} dt \\
 &\quad + \rho_1 \int_0^T \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(2)} \\
 &\quad + \sqrt{1 - \rho_1^2} \int_0^T \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(1)} \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^T \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(4)} \\
 &\quad + \sqrt{1 - \rho_2^2} \int_0^T \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(3)} \\
 &\quad + \log(1 + J) \int_0^T dN_t]
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 H_{\log(S_T)}(u) &= \exp[iu (\log(S_0) + rT) \\
 &\quad - s_2(V_0^{(1)} + \kappa_1 \theta_1 T) - s_4(V_0^{(2)} \\
 &\quad + \kappa_2 \theta_2 T)] \\
 &\quad \times E^Q \left[\exp \left(-s_1 \int_0^T V_t^{(1)} dt \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + s_2 V_T^{(1)} - s_3 \int_0^T V_t^{(2)} dt + s_4 V_T^{(2)} \right) \right] \\
 &\quad \times E^Q \left[\exp \left(-iu \mu_J \int_0^T \lambda_t dt \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{i u \rho_1}{\sigma_{v_1}} \int_0^T Z_1 dN_t \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{i u \rho_2}{\sigma_{v_2}} \int_0^T Z_2 dN_t + \log(1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + J) \int_0^T dN_t \right) \right]
 \end{aligned}$$

وقتی

$$s_1 = - \left(\frac{-iu}{2} + \frac{i u \rho_1 \kappa_1}{\sigma_{v_1}} + \frac{(iu)^2 (1 - \rho_1^2)}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 s_2 &= - \left(\frac{-iu}{2} + \frac{i u \rho_2 \kappa_2}{\sigma_{v_2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(iu)^2 (1 - \rho_2^2)}{2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \sqrt{\kappa_3^2 - 2p(u)\sigma_\lambda^2}, \eta_2 \\
 &= 2\eta_1 e^{-\eta_1 T} \\
 &\quad + (\kappa_3 + \eta_1)(1 - e^{-\eta_1 T}).
 \end{aligned}$$

اثبات: فرایندهای قیمت دارایی پایه، تلاطم و فرایند

اندازه شدت از مدل ذکر شده به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
 \log S_t &= rdt - \lambda_t \mu_J dt - \frac{1}{2} (V_t^{(1)} + V_t^{(2)}) dt + \\
 &\quad \sqrt{V_t^{(1)}} (\rho_1 dW_t^{(2)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} dW_t^{(1)}) + \\
 &\quad \sqrt{V_t^{(2)}} (\rho_2 dW_t^{(4)} + \sqrt{1 - \rho_2^2} dW_t^{(3)}) + \log(1 + \\
 &\quad J) dN_t,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dV_t^{(1)} &= \kappa_1 (\theta_1 - V_t^{(1)}) dt + \sigma_{v_1} \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(2)} \\
 &\quad + Z_1 N_t,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dV_t^{(2)} &= \kappa_2 (\theta_2 - V_t^{(2)}) dt + \sigma_{v_2} \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(4)} \\
 &\quad + Z_2 N_t,
 \end{aligned}$$

$$d\lambda_t = \kappa_3 (\theta_3 - \lambda_t) dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_t^{(5)}$$

که در آن

$$\log(1 + J): \text{Normal}(\log(1 + \mu_J) - \frac{\sigma_s^2}{2}, \sigma_s^2)$$

تابع مشخصه فرایند دارایی پایه یا $(H_{\log(S_T)}(u))$

برابر است با:

$$\begin{aligned}
 H_{\log(S_T)}(u) &= E^Q[\exp(iu \log(S_T))] \\
 &= E^Q[\exp(iu \log(S_0)) + rT \\
 &\quad - \mu_J \int_0^T \lambda_t dt - \frac{1}{2} \int_0^T V_t^{(1)} dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T V_t^{(2)} dt \\
 &\quad + \rho_1 \int_0^T \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(2)} \\
 &\quad + \sqrt{1 - \rho_1^2} \int_0^T \sqrt{V_t^{(1)}} dW_t^{(1)} \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^T \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(4)} \\
 &\quad + \sqrt{1 - \rho_2^2} \int_0^T \sqrt{V_t^{(2)}} dW_t^{(3)} \\
 &\quad + \log(1 + J) \int_0^T dN_t]
 \end{aligned}$$

$$G_T^{(4)}(u) = \frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_{v_2}^2} \log \left(\frac{2d_2}{(1-g_2e^{-d_2T})(\beta_2+d_2)} e^{\frac{1}{2}(\kappa_2-d_2)T} \right),$$

و در روابط فوق برای $j = 1, 2$:

$$\alpha = \frac{(-u^2 - iu)}{2},$$

$$\beta_j = \kappa_j - \rho_j \sigma_{v_j} iu,$$

$$\gamma_j = \frac{\sigma_{v_j}^2}{2}$$

$$d_j = \sqrt{\beta_j^2 - 4\alpha\gamma_j},$$

$$r_{neg}^{(j)} = \frac{\beta_j \pm d_j}{2\gamma_j},$$

$$g_j = \frac{r_{neg}^{(j)}}{r_{pos}^{(j)}}.$$

نشان داده می شود:

$$(G_T^{(1)}(u) - s_2)V_0^{(1)} = r_{neg}^{(1)} \left[\frac{1 - e^{-d_1T}}{1 - g_1e^{-d_1T}} \right] V_0^{(1)} =: D_1(u, T)V_0^{(1)},$$

$$(G_T^{(3)}(u) - s_2)V_0^{(2)} = r_{neg}^{(2)} \left[\frac{1 - e^{-d_2T}}{1 - g_2e^{-d_2T}} \right] V_0^{(2)} =: D_2(u, T)V_0^{(2)},$$

$$\begin{aligned} G_T^{(2)}(u) - s_2\kappa_1\theta_1T &= \kappa_1\theta_1 \left[r_{neg}^{(1)}T - \frac{2}{\sigma_{v_1}} \log \left(\frac{1 - g_1e^{-d_1T}}{1 - g_1} \right) \right] \\ &=: C_1(u, T)\theta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_T^{(4)}(u) - s_4\kappa_2\theta_2T &= \kappa_2\theta_2 \left[r_{neg}^{(2)}T - \frac{2}{\sigma_{v_2}} \log \left(\frac{1 - g_2e^{-d_2T}}{1 - g_2} \right) \right] \\ &=: C_2(u, T)\theta_2, \end{aligned}$$

$$s_3 = \frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}},$$

$$s_4 = \frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}},$$

با استفاده از قضیه فینمن - کاک^۱ (زو، ۲۰۰۹):

$$\begin{aligned} E^Q \left[\exp \left(-s_1 \int_0^T V_t^{(1)} dt + s_2 V_T^{(1)} \right) \right] \\ = \exp(G_T^{(1)}(u)V_0^{(1)} + G_T^{(2)}(u)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^Q \left[\exp \left(-s_3 \int_0^T V_t^{(2)} dt + s_4 V_T^{(2)} \right) \right] \\ = \exp(G_T^{(3)}(u)V_0^{(2)} + G_T^{(4)}(u)), \end{aligned}$$

بنابراین، تابع مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} H_{log(S_T)}(u) = \exp \left[iu (\log(S_0) + rT) - s_2(V_0^{(1)} + \kappa_1\theta_1T) - s_4(V_0^{(2)} + \kappa_2\theta_2T) \right] \\ \times \exp(G_T^{(1)}(u)V_0^{(1)} + G_T^{(2)}(u) + G_T^{(3)}(u)V_0^{(2)} + G_T^{(4)}(u)) \\ \times E^Q \left[\exp \left(-iu\mu_J \int_0^T \lambda_t dt - \frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}} \int_0^T Z_1 dN_t - \frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}} \int_0^T Z_2 dN_t + \log(1 + J) \int_0^T dN_t \right) \right] \end{aligned}$$

که در آن

$$G_T^{(1)}(u) = \frac{s_2d_1(1 + e^{-d_1T}) - (1 - e^{-d_1T}) \left(-\frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}}\kappa_1 + iu - (iu)^2(1 - \rho_1^2) \right)}{(1 - g_1e^{-d_1T})(\beta_1 + d_1)},$$

$$G_T^{(2)}(u) = \frac{2\kappa_1\theta_1}{\sigma_{v_1}^2} \log \left(\frac{2d_1}{(1 - g_1e^{-d_1T})(\beta_1 + d_1)} e^{\frac{1}{2}(\kappa_1 - d_1)T} \right),$$

$$G_T^{(3)}(u) = \frac{s_4d_2(1 + e^{-d_2T}) - (1 - e^{-d_2T}) \left(-\frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}}\kappa_2 + iu - (iu)^2(1 - \rho_2^2) \right)}{(1 - g_2e^{-d_2T})(\beta_2 + d_2)},$$

$$p(u) = -(1 + iu\mu_j) + \exp\left(iu\mu_s + \frac{\sigma_s^2(iu)^2}{2}\right) \times \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

بار دیگر با استفاده از قضیه فیمن - کاک:

$$E^Q[\exp(p(u) \int_0^T \lambda_t)] = \exp(B_T^{(1)}(u)\lambda_0 + B_T^{(2)}(u)),$$

که در رابطه فوق

$$B_T^{(1)}(u) = \frac{2p(u)(1 - e^{\eta_1 T})}{\eta_2},$$

$$B_T^{(2)}(u) = \frac{2\kappa_3\theta_3}{\sigma_\lambda} \log\left[\frac{2\eta_1}{\eta_2} \exp\left(\frac{1}{2}(\kappa_3 - \eta_1)T\right)\right],$$

$$\eta_1 = \sqrt{\kappa_3^2 - 2p(u)\sigma_\lambda^2},$$

$$\eta_2 = 2\eta_1 e^{-\eta_1 T} + (\kappa_3 + \eta_1)(1 - e^{-\eta_1 T}).$$

بنابراین، تابع مشخصه به صورت زیر به دست می آید:

$$H_{\log(S_T)}(u) = \exp\{iu(\log(S_0) + rT) + C_1(u, T)\theta_1 + D_1(u, T)V_0^{(1)} + C_2(u, T)\theta_2 + D_2(u, T)V_0^{(2)} + B_T^{(1)}(u)\lambda_0 + B_T^{(2)}(u)\}$$

در این مطالعه قیمت گذاری اختیار توانی استاندارد و سقف، ابتدا در شرایطی فرضی و در حالت های مختلفی از قیمت واقعی دارایی پایه، انجام و با هم مقایسه شده اند؛ سپس با استفاده از شاخص کل بورس تهران، این قیمت گذاری و مقایسه در شرایط واقعی بازار بررسی شده است. در شرایط فرضی، به پارامترهای مدل، مقادیر فرضی نسبت داده شد. قیمت گذاری با چند حالت از قیمت توافقی انجام و سود یا زیان هر اختیار با توجه به اعمال شدن یا اعمال نشدن اختیار، محاسبه شد. در بازار واقعی از شاخص کل بازار در جایگاه دارایی پایه استفاده شد.

که

$$C_1(u, T) = \kappa_1 \left[r_{neg}^{(1)} T - \frac{2}{\sigma_{v_1}} \log\left(\frac{1 - g_1 e^{-d_1 T}}{1 - g_1}\right) \right],$$

$$D_1(u, T) = r_{neg}^{(1)} \left[\frac{1 - e^{-d_1 T}}{1 - g_1 e^{-d_1 T}} \right],$$

$$C_2(u, T) = \kappa_2 \left[r_{neg}^{(2)} T - \frac{2}{\sigma_{v_2}} \log\left(\frac{1 - g_2 e^{-d_2 T}}{1 - g_2}\right) \right],$$

$$D_2(u, T) = r_{neg}^{(2)} \left[\frac{1 - e^{-d_2 T}}{1 - g_2 e^{-d_2 T}} \right].$$

همچنین، نشان داده می شود:

$$E^Q \left[\exp\left(-iu\mu_j \int_0^T \lambda_t dt - \frac{i\rho_1}{\sigma_{v_1}} \int_0^T Z_1 dN_t - \frac{i\rho_2}{\sigma_{v_2}} \int_0^T Z_2 dN_t + \log(1 + J) \int_0^T dN_t\right) \right] = E^Q \left[\exp\left(-iu\mu_j \lambda_{0,T} + \lambda_{0,T} \left((1 + \mu_j)^{iu} e^{\sigma_s^2 \frac{iu}{2}(iu-1)} - 1 \right) + e^{\lambda_{0,T} \left(e^{\frac{i\rho_1 Z_1}{\sigma_{v_1}} - 1} \right)} - 1 \right) + e^{\lambda_{0,T} \left(e^{\frac{i\rho_2 Z_2}{\sigma_{v_2}} - 1} \right)} - 1 \right) \right] = E^Q[\exp(p(u)\lambda_{0,T})]$$

$$j = 1, 2 \text{ برای } \lambda_{0,T} = \int_0^T \lambda_t \text{ که}$$

$$c_j = 1 - i\rho_j \mu_{v_j},$$

$$v_j = \frac{\beta_j + d_j}{(\beta_j + d_j)c_j - 2\mu_{v_j}\alpha} + \frac{4\mu_{v_j}\alpha}{(d_j c_j)^2 - (2\mu_{v_j}\alpha - \beta_j - c_j)^2} \times \log \left[1 - \frac{(d_j - \beta_j)c_j + 2\mu_{v_j}\alpha}{d_j c_j} (1 - e^{-d_j}) \right]$$

سال و قیمت توافقی مشخص شده است. همان طور که مشاهده می شود در اختیار توانی استاندارد قیمت اختیار حداکثر تا مقدار ۳۰ افزایش یافته است؛ اما در اختیار سقف، ارزش اختیار از مقدار سقف بالاتر نشده است.

اگر مقدار واقعی دارایی پایه در سررسید از قیمت توافقی کمتر باشد، اختیار خرید اعمال نمی شود. در این حالت ارزش اختیار به طور کامل برای دارنده آن زیان و برای فروشنده اختیار سود است. با در نظر گرفتن این شرایط، اختیار توان استاندارد نسبت به اختیار سقف برای دارنده اختیار زیان بیشتری و برای فروشنده اختیار سود بیشتری ایجاد خواهد کرد. این سود در سرسیدهای بلندمدت سود آربیتراژی است.

در صورتی که قیمت واقعی دارایی پایه در سررسید از قیمت توافقی بیشتر باشد، اختیار اعمال می شود و سود اختیار از تفاضل قیمت توافقی و قیمت آتی اختیار از قیمت واقعی دارایی به دست می آید. نکته جالب توجه این است که چون قیمت اختیار سقف از قیمت اختیار توان استاندارد کمتر است، اگر اختلاف قیمت توافقی و قیمت واقعی در سررسید زیاد باشد، دارنده آن اختیار سقف سود آربیتراژی دارد. در جدول ۱ سود و زیان هر دو اختیار با سررسید یک ساله و قیمت توافقی معین آورده شده است. در این جدول برای قیمت واقعی دارایی پایه چند حالت متفاوت فرضی لحاظ شده است.

دارنده این اختیار، به طور غیرمستقیم، اختیاری از تمام بازار را در سبد خود دارد (صاحبی فرد، ۱۳۹۸). بدین منظور مقدار شاخص کل بازار طی ۱۰ سال، از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا انتهای سال ۱۳۹۷، استخراج شد. فرض بر این بود که ابتدای شهریور سال ۱۳۹۷ لحظه حال و هدف، قیمت گذاری اختیار توان استاندارد و سقف، با سررسید سه ماهه، شش ماهه و یک ساله باشد. با دو حالت مختلف از قیمت توافقی قیمت گذاری انجام و سود و زیان هر دو اختیار مشخص شد. قیمت های توافقی از ارزش آتی قیمت لحظه حال با نرخ رشد برابر با بازده بدون ریسک و بازده ماهانه دارایی پایه حاصل شده است.

یافته ها

برای روش تبدیل فوریه سریع $\alpha = 0.75$ و $N = 2^{12}$ در نظر گرفته شده اند. پارامترهای مدل ذکر شده به صورت زیر فرض شده اند (مهردوست و صابر، ۲۰۱۴):

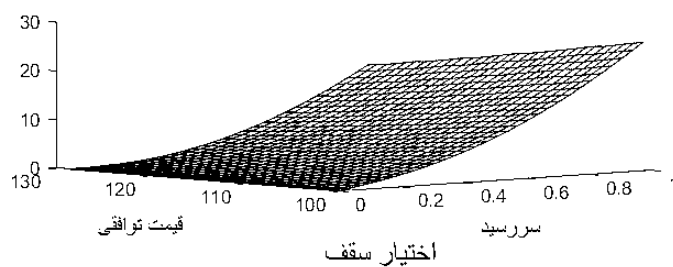
$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0/9, \theta_1 = 0/1, \sigma_{v_1} = 0/1, V^{(1)}_0 = 0/6, \\ \kappa_2 &= 1/2, \theta_2 = 0/15, \sigma_{v_2} = 0/2, \\ V^{(2)}_0 &= 0/7, \rho_1 = -0/5, \rho_2 = -0/5, \kappa_3 = 0/7, \\ \theta_3 &= 0/3, \sigma_\lambda = 0/4, \lambda_0 = 0/1, r = 0/1 \\ \mu_s &= 0/22, \sigma_s = 0/25, \rho_j = -0/4, \mu_{v_1} = 0/05, \\ \mu_{v_2} &= 0/07, S_0 = 100 \end{aligned}$$

در بخش اول اختیار خرید توانی با توان دو و اختیار سقف با سقف سود ۱۵ در نظر گرفته شده است. در شکل ۱ تغییرات این دو اختیار با تغییر سررسید تا یک

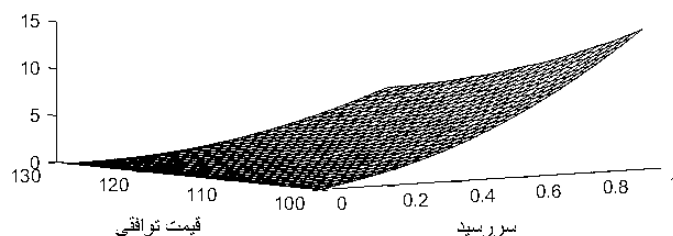
جدول (۱) مقایسه سود و زیان اختیار خرید توانی نوع اول و سقف با توان دو

| سود (زیان) اختیار توان سقف | ارزش اختیار توان سقف | سود (زیان) اختیار توان استاندارد | ارزش اختیار توان استاندارد | قیمت واقعی (فرضی) | قیمت توافقی |
|-------------------------------|----------------------------|--|-------------------------------|----------------------|----------------|
| -۲/۷۳۷۹ | ۲/۶۰۴۴ | -۷/۸۶۹۷ | ۷/۴۸۵۹ | ۱۱۰ | ۱۲۰ |
| ۷/۲۶۲۰ | ۲/۶۰۴۴ | ۲/۱۳۰۲ | ۷/۴۸۵۹ | ۱۳۰ | ۱۲۰ |
| ۲۷/۲۶۲۰ | ۲/۶۰۴۴ | ۲۲/۱۳۰۲ | ۷/۴۸۵۹ | ۱۵۰ | ۱۲۰ |
| -۶/۵۸۲۶ | ۶/۲۶۱۶ | -۱۹/۴۸۶۳ | ۱۸/۵۳۶۰ | ۱۲۰ | ۱۳۰ |
| ۱۳/۴۱۷۳ | ۶/۲۶۱۶ | ۰/۵۱۳۶ | ۱۸/۵۳۶۰ | ۱۵۰ | ۱۳۰ |
| ۲۳/۴۱۷۳ | ۶/۲۶۱۶ | ۱۰/۵۱۳۶ | ۱۸/۵۳۶۰ | ۱۶۰ | ۱۳۰ |

اختیار توانی استاندارد



اختیار سقف



شکل (۱) تغییرات قیمت اختیار توانی استاندارد و اختیار سقف با توان دو

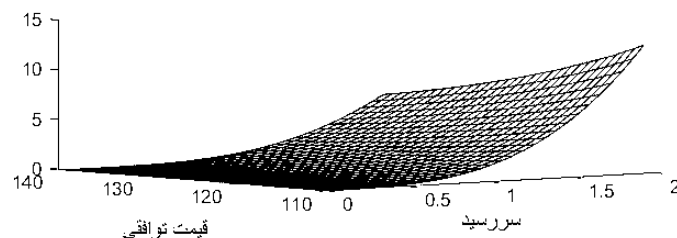
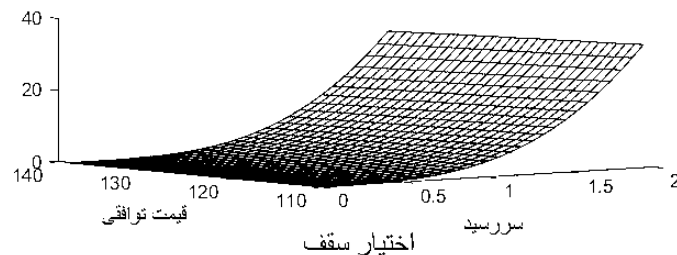
استاندارد از ایجاد فرصت آربیتراژ به روش‌های مختلف جلوگیری کرده است. مانند بخش قبل، زمانی که قیمت واقعی دارایی پایه از قیمت توافقی خیلی بیشتر باشد اختیار توانی استاندارد نسبت به اختیار سقف، سود آربیتراژی کمتری ایجاد خواهد کرد. در جدول ۲ سود و زیان بین دو نوع اختیار با سررسید دوساله و قیمت واقعی فرضی مقایسه شده‌اند.

در شکل ۲ اختیار توانی با توان سه و اختیار سقف با سقف ۲۰ با تغییر قیمت توافقی و سررسید تا دو سال در نظر گرفته شده است. در حالت اختیار توانی استاندارد ارزش اختیار تا ۴۰ و ارزش اختیار سقف تا ۱۵ تغییر یافته است. عایدی ناشی از اختیار توانی استاندارد زمانی که قیمت واقعی از قیمت توافقی بیشتر باشد، مقداری منفی شده است. در واقع، در این حالت اختیار توانی

جدول (۲) مقایسه سود و زیان اختیار خرید توانی نوع اول و سقف با توان دو

| سود (زیان) اختیار توان سقف | ارزش اختیار توان سقف | سود (زیان) اختیار توان استاندارد | ارزش اختیار توان استاندارد | قیمت واقعی (فرضی) | قیمت توافقی |
|-------------------------------|----------------------------|--|-------------------------------|----------------------|----------------|
| -۱/۷۰۴۲ | ۱/۷۰۴۲ | -۹/۱۵۳۷ | ۹/۱۵۳۷ | ۱۱۰ | ۱۲۰ |
| ۸/۲۰۸۴۲ | ۱/۷۰۴۲ | ۰/۳۷۶۹ | ۹/۱۵۳۷ | ۱۳۰ | ۱۲۰ |
| ۲۸/۲۰۸۴۲ | ۱/۷۰۴۲ | ۲۰/۳۷۶۹ | ۹/۱۵۳۷ | ۱۵۰ | ۱۲۰ |
| -۶/۴۸۹۳ | ۶/۴۸۹۳ | -۳۴/۸۵۶ | ۳۴/۸۵۶ | ۱۲۰ | ۱۳۰ |
| ۱۳/۱۷۷۹ | ۶/۴۸۹۳ | -۱۶/۶۴۳۱ | ۳۴/۸۵۶ | ۱۵۰ | ۱۳۰ |
| ۲۳/۱۷۷۹ | ۶/۴۸۹۳ | -۶/۶۴۳۱ | ۳۴/۸۵۶ | ۱۶۰ | ۱۳۰ |

اختیار توانی استاندارد



شکل (۲) تغییرات قیمت اختیار توانی استاندارد و اختیار سقف با توان سه

حداکثر درست‌نمایی^۱ الگوریتمی برای برآورد پارامترهای مدل هستون ارائه کرده است. بدین منظور ابتدا شرط‌های زیر برای پارامترهای مدل هستون در نظر گرفته می‌شود:

۱- مقدار اولیه V_0 همیشه مثبت است.

۲- نرخ بازگشت به میانگین κ ، میانگین بلندمدت θ و نوسانات واریانس σ همگی مقادیر مثبت هستند.

در ادامه نتایج قیمت گذاری این دو اختیار بر شاخص کل بورس اوراق بهادار مشخص شده است. مقدار شاخص کل در ابتدای شهریور سال ۱۳۹۷ برابر $۱۳۶۳۴۳/۴$ بوده که برای ساده‌شدن محاسبات، تمامی قیمت‌ها به 10^3 تقسیم شده است. استفاده از مدل ذکر شده نیازمند برآورد پارامترهای موجود در مدل است. وانگ (۲۰۱۸) با استفاده از اینکه تلاطم دارای توزیع گاوسی است، تلاطم کل بازه را تجزیه و با روش

و $\Delta W_{i_k} = W_{i_k} - W_{i_{k-1}}$ برای $i = 1, 2$ ، برای

اثبات به وانگ (۲۰۱۸) مراجعه شود.

در رابطه فوق علاوه بر تلاطم، قیمت هر دوره استفاده و قیمت آخرین روز هر دوره، S_k انتخاب شده است. در رابطه برای اندازه گیری پرش، روند حرکت دارایی پایه مشاهده و تعداد پرش های ناگهانی قیمت مشخص شده است؛ سپس این پرش ها نیز به صورت جداگانه فرایند تصادفی دیگری در نظر گرفته و پارامترهای آن برآورد شده است. این بخش به متن مقاله اضافه شد. نتیجه برآورد پارامترها به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0.7735, \theta_1 = 7/3363, \sigma_{v_1} = 3/3381, \\ V_0^{(1)} &= 5/7635, \kappa_2 = 20/6, \theta_2 = 1/9647, \\ \sigma_{v_2} &= 5/3251, V_0^{(2)} = 12/90, \rho_1 = 0/02, \\ \rho_2 &= 0/191, \kappa_3 = 10/8718, \theta_3 = 3/7037, \\ \sigma_\lambda &= 2/4468, \lambda_0 = 3, \mu_s = 3/1111, \sigma_s = 3/27, \\ \rho_J &= 0/4, \mu_{v_1} = 1/1487, \mu_{v_2} = 2/5771, \end{aligned}$$

مقدار میانگین بازده لگاریتمی که لگاریتم، حاصل تقسیم قیمت روز بر روز گذشته است، در این بازه ۰/۰۳ محاسبه شده است. در سود، اختیار توانی استاندارد و اختیار سقف در سررسیدهای مختلف و دو حالت مختلف از قیمت توافقی، محاسبه و نتایج در جدول ۳ مشخص شده است.

۳- $\sigma^2 > 2\kappa\theta$ که شرط فلر^۱ شناخته می شود.

قضیه: برآورد پارامترهای κ ، θ و σ به صورت زیر است:

$$\hat{\kappa} = \frac{2}{\delta} \left(1 + \frac{\hat{P}\delta}{2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{V_{k-1}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{V_k}{V_{k-1}}} \right), \quad (19)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{4}{\delta n} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{V_k} - \sqrt{V_{k-1}} - \frac{\delta}{2\sqrt{V_{k-1}}} (\hat{P} - \hat{\kappa} V_{k-1}) \right]^2}, \quad (20)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{P} + \frac{1}{4} \hat{\sigma}^2}{\hat{\kappa}} \quad (21)$$

که $n = \frac{T}{\delta}$ و

$$\hat{P} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{V_{k-1} V_k} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{V_k}{V_{k-1}}} \sum_{k=1}^n V_{k-1}}{\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{V_{k-1}} \sum_{k=1}^n V_{k-1}} \quad (22)$$

در این پژوهش مقدار شاخص کل در بازه زمانی ابتدای مرداد سال ۱۳۸۸ تا ابتدای شهریور سال ۱۳۹۷، استخراج شده است. داده های بازه بررسی شده به دوره های سه ماهه تقسیم و در هر دوره تلاطم محاسبه شده است. این دسته ها به دو بخش تقسیم و هر کدام یکی از دو فرایند نوسان در نظر گرفته شده است. در رابطه فوق V_k تلاطم هر دوره است. برای تخمین ضریب همبستگی ρ داریم:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n\delta} \sum_{k=1}^n \Delta W_{1k} \Delta W_{2k}. \quad (23)$$

$$\begin{cases} W_{1k} = \frac{\ln S_k - \ln S_{k-1} - (r - \frac{1}{2} V_{k-1}) \delta}{\sqrt{V_{k-1}}} \\ W_{2k} = \frac{V_k - V_{k-1} - \kappa(\theta - V_{k-1}) \delta}{\sigma \sqrt{V_{k-1}}} \end{cases} \quad (24)$$

جدول (۳) مقایسه قیمت اختیار خرید توانی نوع اول و سقف با توان دو

| سود اختیار سقف با قیمت توافقی ۴۰۰ و سقف سود ۱۰ | سود اختیار توانی استاندارد با قیمت توافقی ۴۰۰ | سود اختیار سقف با قیمت توافقی ۲۰۰ و سقف سود ۵ | سود اختیار توانی استاندارد با قیمت توافقی ۲۰۰ | سررسید |
|---|---|--|---|---------|
| ۷/۳۳۵ | ۱۸/۱۰۴ | ۲/۹۶ | ۴۱/۰۱۹ | سه ماهه |
| ۳/۴۵۴ | ۳۹/۲۱۸۹ | ۴/۱۶۷ | ۱۵/۲۱ | شش ماهه |
| ۶/۷۶۷ | ۲۰/۷۴۹۸ | -۵/۲۵۹ | -۲۷/۲۱۶۹ | یک ساله |

از خاصیت اختیار معامله است؛ اما در بازار، فضای سودجویی و آربیتراژی ایجاد می کند؛ ولی سود اختیار سقف نسبت به سود اختیار توانی کمتر شده و از ایجاد این فضای سودجویی، جلوگیری کرده است.

نتایج و پیشنهادها

در این مقاله ابتدا مدلی کارآمدتر برای بازار معرفی و تابع مشخصه محاسبه شد؛ سپس فرمولی برای قیمت گذاری سه نوع اختیار معامله توانی تحت مدل تصادفی پیشنهادی، یعنی مدلی با دو تلاطم تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی، با روش تبدیل فوریه سریع استخراج شد. در نهایت، برخی نتایج عددی برای دو اختیار توانی استاندارد و اختیار سقف مشخص و ایجاد شرایط آربیتراژ در حالت های مختلف بازار بررسی شد که نتایج عددی در بازاری فرضی نشان دادند، اختیار سقف ممکن است قیمت اختیار را تا حدی کنترل کند؛ اما وقتی قیمت واقعی (تلاطم بازار) رشد بیشتری داشته باشد، اختیار توانی در جلوگیری از ایجاد فرصت سودجویی، عملکرد بهتری دارد؛ همچنین با استفاده از شاخص کل بورس در جایگاه دارایی پایه و استفاده از مدل مطرح شده، در بازار واقعی نیز سود و زیان دو اختیار نشان داده شدند و مشخص شد که در

قیمت واقعی دارایی (شاخص کل) در سررسید سه ماهه برابر ۱۷۱/۲۵۲۹، در سررسید شش ماهه برابر ۲۶۹/۹۸۶۱ و در سررسید یک ساله برابر ۱۵۹/۴۸۹۵ بوده است. در حالتی که قیمت توافقی ۲۰۰ در نظر گرفته شده است، برای سرسیدهای سه ماهه و شش ماهه سود اختیار توانی سقف دارای محدودیت (سقف سود ۵) بوده است که مانع افزایش سود دارنده اختیار می شود؛ اما اختیار توانی استاندارد که این محدودیت را ندارد حتی در سررسید سه ماهه نیز سود بسیاری برای دارنده به وجود آورده است. در سررسید یک ساله، قیمت توافقی از قیمت واقعی دارایی پایه کمتر است. در این حالت دارنده اختیار، اختیار را اعمال نمی کند و تمام ارزش اختیار، زیان دارنده است. در این حالت نیز اختیار توانی استاندارد زیان بیشتر برای دارنده و سود بیشتر برای فروشنده اختیار ایجاد کرده است؛ یعنی اختیار توانی استاندارد هم سود و هم زیان آربیتراژی ایجاد کرده است. در حالتی دیگر، قیمت توافقی برابر ۴۰۰ در نظر گرفته شده است که در سررسید یک ساله نیز اختیار اعمال شود. همان طور که در جدول ۳ مشاهده می شود، در این حالت نیز دارنده اختیار توانی استاندارد، سود بیشتری نسبت به اختیار سقف کسب می کند؛ هر چند بخشی از این سود جزئی

اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش.
مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، ۳(۲)، ۶۰-۴۵.

References

- Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, 9 (1): 69-107. DOI: 10.3386/w4596.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-654. DOI: 10.1086/260062.
- Carr, P., & Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4): 61-73. DOI: 10.21314/jcf.1999.043.
- Dastranj, E., & Latifi, R. (2017). Option pricing under the double stochastic volatility with double jump model. *Computational Methods for Differential Equations*, 5(3): 224-231.
- Dastranj, E., Sahebi Fard, H., Abdolbaghi, A., & Hejazi, R. (2019). Power option pricing under the unstable conditions (Evidence of power option pricing under fractional Heston model in the Iran gold market). *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 122690. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122690.
- Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jumps diffusions. *Econometrical*, 68(6): 1343-1376. DOI: 10.3386/w7105.
- Gatheral, J. (2011). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide* (Vol.357). John Wiley Sons. DOI: 10.1002/9781119202073.
- González Sáez, G. K. (2014). *Fourier Transform Methods For Option Pricing: An Application To Extended Heston-Type Models*. (MSc Thesis). Universidad del País Vasco, Spain.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency option. *The Review of Financial Studies*, 6(2): 327-343. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
- Ibrahim S. N. I., O'Hara J., & Mohd Zaki M. S. (2016). Pricing formula for power options with jump-diffusion. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10(4): 1313-1317. DOI: 10.18576/amis/100410.

بازار واقعی، هر چند اختیار توانی برای دارنده، سود بیشتری دارد؛ اما سود به دست آمده در بازار فضای سودجویی ایجاد می‌کند و برای بازار مفید نیست. اختیار سقف با اعمال سقفی برای سود اختیار، هم برای دارنده سودی منطقی دارد و هم در بازار از ایجاد فضای آربیتراژی جلوگیری می‌کند.

از مدل مطرح شده و روش تبدیل فوریه سریع در قیمت‌گذاری انواع اختیار معامله استفاده می‌شود؛ همچنین برای پوشش بهتر آشفتگی‌های بازار و نزدیک‌تر شدن قیمت‌گذاری به بازار واقعی، به مدل ارائه شده، یک یا چند فرایند پرش دیگر، با توزیع‌هایی با دم سنگین‌تر اضافه می‌شود.

یکی از مهم‌ترین مسائل پیش رو در مدل‌های تلاطم تصادفی، تخمین پارامترهای مدل است. استفاده از روش‌های مختلف برای تخمین پارامترها باعث ایجاد خطا در مقدار پارامترها می‌شود. مسئله دیگر این است که استفاده از هر مدلی برای قیمت‌گذاری، باعث ایجاد محدودیت‌هایی در پیش‌فرض‌های بازار می‌شود؛ مثلاً مدل بررسی شده در این پژوهش، بازده دارایی را ثابت می‌انگارد که در واقعیت ممکن است چنین نباشد و یافتن مدلی که کاملاً بازار را پوشش دهد نیز کاری غیرممکن است؛ بنابراین این پژوهش فقط به بازارهایی که روند تغییرات دارایی، تقریباً با مدل مطرح شده مطابق باشند، محدود می‌شود.

منابع فارسی

- صاحبی فرد، ح. (۲۰۱۹). مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران (پایان‌نامه کارشناسی ارشد)، دانشگاه صنعتی شاهرود (۰۱/۰۰۷/۰۰۸/۰۱۷).
- مهردوست، ف.، و صابر، ن. (۲۰۱۴). قیمت‌گذاری

- 10.1080/03610918.2019.1620275. (In Persian)
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Finance and Economics*. 3(1): 125-144. DOI: 10.1016/0304-405x(76)90022-2.
- Sahebi, F. H., (2019). *Comparing of Power Option Pricing under Some Stochastic Volatility Models in Tehran Stock Exchange*. (MSc Thesis). Shahrood University of Technology, (01/007/008/017). (In Persian)
- Wang, X., He, X., Bao, Y., & Zhao, Y., (2018) Parameter estimates of Heston stochastic volatility model with MLE and consistent EKF algorithm. *Science China Information Sciences*. 61(4): 042202. DOI: 10.1007/s11432-017-9215-8.
- Zhu, J. (2009). *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*. Springer Science Business Media. DOI: 10.1007/978-3-642-01808-4.
- Kim, J., Kim, B., Moon, K. S., & Wee, I. S. (2012). Valuation of power options under Heston's stochastic volatility model. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 36(11): 1796-1813. DOI: 10.1016/j.jedc.2012.05.005.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*. 48(8): 1086-1101. DOI: 10.2139/ssrn.242367.
- Lee, Y., Yoo, H., & Lee, J., (2017). Pricing formula for power quanto options with each type of payoffs at maturity. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 13(9): 6695-6702. DOI: 10.4134/ckms.2016.31.2.415.
- Liu, J., & Chen, X. (2012) Implied volatility formula of European power option pricing. *arXiv preprint arXiv*. 1203.0599.
- Mehrdoost, F., & Saber, N., (2014). The option pricing under double Heston model with jumps. *Journal of Advanced Mathematical Modeling*. 3(2): 45-60. DOI: